МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ.

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

В.Г.ЧИРСКИЙ,А.И. КОЗКО, Л.М,ЛУЖИНА

2022

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам первого курса химического факультета МГУ.

<u>Декартово произведение множеств. Бинарные отношения.</u>

<u>Декартово произведение множеств</u>

<u>Определение 1</u>. Пусть даны два множества, А и B. Образуем множество упорядоченных пар элементов, у которых первый элемент принадлежит A, а второй - B. Полученное множество называется ***декартовым произведением множеств*** A и B и обозначается $A \times B$.

Перечислим некоторые простейшие свойства декартова произведения.

- Если $A \subset C, B \subset D$, то $(A \times B) \subset (C \times D)$;
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Отметим, что $A \times B = A \times B$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

<u>Бинарные отношения</u>

<u>Определение 2</u>. Любое подмножество R множества $A \times B$ называется **<u>бинарным отношением</u>.**

Изучим понятие бинарного отношения более подробно, так как оно является важным не только для математического анализа, но и для компьютерной математики.

Задавать бинарные соотношения конечных множеств можно, например, с помощью таблиц. Например, пусть $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,\}$. Зададим отношение $R \subset A \times B$ свойством: пара $(x, y), x \in A,\ y \in B$ принадлежит отношению R тогда и только тогда, когда x есть делитель y. Отношение R, таким образом, состоит из пар: $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,6)$.

Изобразим это отношение следующим образом. Проведём три прямые, соответствующие трём элементам множества A. Проведём шесть перпендикулярных им прямых, соответствующих элементам множества B. Отметим жирной точкой те точки пересечения этих прямых, которые соответствуют отношению R(рис.1).

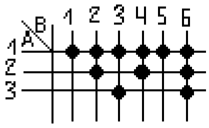

Рис.1

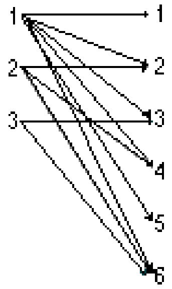

Рис.2

$$\begin{pmatrix} 111111 \\ 010101 \\ 001001 \end{pmatrix}$$

Рис.3

Другой способ задания бинарного отношения – использование стрелок. Элементы A и B изображаются в виде точек плоскости. Стрелками соединены те, и только те элементы $x \in A,\ y \in B$, для которых $(x, y) \in R$.(рис.2)

Это же бинарное отношение можно задать матрицей, состоящей из 0 и 1. Её строки соответствуют элементам множества A, столбцы – элементам множества B. Элемент этой матрицы равен 1 тогда и только тогда, когда он стоит на пересечении строки и столбца, соответствующих паре $x \in A, y \in B$, для которой $(x, y) \in R$.

<u>Определение 2</u>. Элемент называется ***проекцией*** элемента $\underline{a} = (a, b) \in A \times B$ на множество A. Для произвольного подмножества $E \subset A \times B$ его проекцией на A называется множество, состоящее из проекций на A всех элементов множества E.

<u>Определение 4</u>. ***Сечением*** $x = a$ множества E называется множество $E(a)$ элементов $y \in B$, для которых $(a, y) \in E$. Множество сечений отношения E называется ***фактормножеством*** B по отношению E и обозначается $B|E$.

Так как отношения представляют собой множества, к ним можно применить операции, определённые в предыдущем параграфе. Но кроме этих операций есть ещё важные операции композиции и симметризации.

Пусть даны множества A, B, C и отношения $E \subset A \times B, G \subset B \times C$.

<u>Определение 5</u>. ***Композиция*** отношений E, G - это отношение GE между элементами множеств A и C такое, что для всех $x \in A$ сечение множества GE по x совпадает с сечением множества G по подмножеству $E(x) \subset B$, т.е. $(GE)(x) = G(E(x))$.

Если даны две пары отношений $E \subset A \times B, D \subset A \times B$ и $G \subset B \times C$,

$F \subset B \times C$, причём $E \subset D$ и $G \subset F$, то операция композиции обладает следующим свойством: $EG \subset DF$.

Определение 6. Отношение, ***симметричное*** к некоторому отношению $E \subset A \times B$ и обозначаемое E^{-1}, представляет собой подмножество множества, образованное теми парами $(x, y) \in B \times A$, для которых $(x, y) \in E$. Если $E \subset A \times B$ и $G \subset B \times C$, то $(EG)^{-1} = G^{-1}E^{-1}$.

Предположим, что задано некоторое основное множество M. Отношение $E \subset M \times M$ называется ***отношением эквивалентности***, если оно обладает такими свойствами:

1. Рефлексивностью: всякий элемент a эквивалентен самому себе. Иными словами, для любого $a \in M$ пара $(a, a) \in E$.

2. Симметричностью: для любых двух элементов $a, b \in M$ из того, что a эквивалентен b следует, что b эквивалентен a. Другими словами, если $(a, b) \in E$, то $(b, a) \in E$. Это означает, что отношение E совпадает со своим обратным, E^{-1}.

3. Транзитивностью: если a эквивалентен b, а b эквивалентен c, то a эквивалентен c. Иначе говоря, если $(a, b) \in E$ и $(b, c) \in E$, то $(a, c) \in E$.

Очень часто отношение эквивалентности элементов $a, b \in M$ обозначается так: $a \sim b$.

Важным понятием является понятие класса эквивалентности. ***Класс эквивалентности*** элемента $a \in M$ состоит из всех элементов $b \in M$, эквивалентных элементу a. Для неэквивалентных элементов их классы эквивалентности не пересекаются. Множество классов эквивалентности называется фактормножеством множества M по отношению E и обозначается M/E. Если взять ровно по одному элементу из каждого класса эквивалентности, получим систему представителей.

В качестве примера рассмотрим множество $\mathbb{Z}$ целых чисел. Зафиксируем произвольное целое число $m \neq 0$ и назовём два целых числа a, b ***сравнимыми***

по модулю m (что обозначается $a \equiv b(mod\ m)$), если разность $a - b$ делится на m. Легко видеть, определённое таким образом отношение обладает всеми свойствами отношения эквивалентности. Классы эквивалентности называются классами вычетов по модулю m, в качестве системы представителей можно взять всевозможные остатки от деления на m, т.е. числа $0,1,\dots,m-1$. Это множество обозначается $\mathbb{Z}_m$. На нём можно определить операции сложения и умножения естественным образом. Имеется в виду, что следует просуммировать вычеты, как обычные целые числа, разделить сумму на m с остатком и этот остаток назвать суммой вычетов. Аналогично определим произведение вычетов.