Лекция 1

Рациональные числа

Все свойства обыкновенных дробей и арифметических действий над ними мы считаем известными из школьного курса и будем опираться на них в наших рассуждениях. Считаем также известными обозначения основных числовых множеств: множества натуральных чисел, целых чисел и рациональных чисел.

Напомним, что рациональным называется число, представимое в виде $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ и $(m, n) = 1$. Например, $\frac{1}{2}$ и $-\frac{3}{2}$ – рациональные числа, а $\frac{3}{6}$ – нет, так как $(3, 6) > 1$.

В природе естественным образом возникают числа, не являющиеся рациональными. Например, в прямоугольном треугольнике с единичными катетами длина гипотенузы, как следует из теоремы Пифагора, равна числу, квадрат которого равен 2. Как мы сейчас увидим, это число не является рациональным.

Пример 1. *Рассмотрим уравнение $x^2 = 2$. Предположим, что у этого уравнения есть рациональное решение, т.е. $x = \frac{p}{q}$, где дробь $\frac{p}{q}$ несократима. Тогда $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$, откуда следует, что число p^2 чётное, а тогда и число p чётное, т. е. $p = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Поэтому верно равенство $4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$, что означает чётность числа q. Это означает, что дробь $\frac{p}{q}$ сократима вопреки нашему предположению. Таким образом, число, квадрат которого равен 2, не является рациональным, а $x^2 = 2$ – это пример уравнения, не имеющего решения в рациональных числах.*

Рассмотрим теперь числовые множества A и B.

Определение 1. *Говорят, что множество A лежит левее множества B, если $a \leq b$ для всяких $a \in A$ и $b \in B$.*

Например, если множество A состоит из всех рациональных чисел, меньших 10, а B состоит из всех рациональных чисел, больших 10, то A лежит левее B.

Определение 2. *Пусть множество A лежит левее B. Тогда говорят, что число c разделяет множества A и B, если $a \leq c$ и $c \leq b$ для всех $a \in A, b \in B$.*

Например, число 10 разделяет множества из примера перед определением 2.

Теперь зададимся важным вопросом: если взять два подмножества множества рациональных чисел, одно из которых лежит левее другого, то всегда ли найдётся рациональное число, разделяющее два этих подмножества? Отрицательный ответ на этот вопрос будет ясен после следующего примера.

Пример 2. *Пусть $A = \{a : a > 0, a^2 \leq 2\}$, а $B = \{b : b > 0, b^2 \geq 2\}$. Тогда A лежит левее B, т.к. для всех $a \in A, b \in B$ имеем $0 \leq b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$, откуда, в силу того, что $a + b > 0$, следует, что $0 \leq b - a$. Докажем,что если число c разделяет множества A и B, то оно удовлетворяет равенству $c^2 = 2$, (при этом из примера 1 будет следовать, что c не является рациональным). Предположим противное и заметим, что $1 \leq c \leq 2$, т. к. 1 лежит множестве A, а 2 – во множестве B.*

Возможны два случая. Если $c^2 < 2$, то существуют числа, большие c, квадрат которых также меньше 2 (поэтому c не может разделять множества A и B). Действительно, рассмотрим число $c + \frac{2-c^2}{5}$. Тогда

$$\left(c + \frac{2 - c^2}{5}\right)^2 = c^2 + 2c\frac{2 - c^2}{5} + \left(\frac{2 - c^2}{5}\right)^2 < c^2 + 4\frac{2 - c^2}{5} + \frac{2 - c^2}{5} = 2.$$

Таким образом, в этом случае c не разделяет наши множества. Если же $c^2 > 2$, то найдутся числа, меньшие c, квадрат которых также больше 2. Например, возьмём число $c - \frac{c^2-2}{4}$. При возведении его в квадрат получим $c^2 - 2c\frac{c^2-2}{4} + \left(\frac{c^2-2}{4}\right)^2 > c^2 - 4\frac{c^2-2}{4} = 2$.

Таким образом, если найдётся число c, разделяющее множества A и B, то обязательно $c^2 = 2$.

Если допустить, что в этом примере множества A и B состоят лишь из рациональных чисел, то, как мы видим, может не найтись рационального числа, разделяющего два подмножества множества рациональных чисел.

Вещественные числа. Принцип полноты.

Важным свойством числового множества является принцип полноты, о котором речь идёт в следующем определении.

Определение 3. *Говорят, что для числового множества выполняется принцип полноты, если для любых двух его подмножеств, одно из которых лежит левее другого, найдётся элемент, разделяющий эти множества.*

Множество действительных чисел, которое мы обозначим $\mathbb{R}$, должно удовлетворять ряду условий. Во-первых, сумма и произведение любых элементов этого множества снова является элементом этого множества. Кроме того, выполнены следующие свойства.

1) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *ассоциативности по сложению*:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

2) Для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$ выполнено условие *коммутативности по сложению*:

$$a + b = b + a.$$

3) Существует *нейтральный элемент относительно операции сложения* $0 \in \mathbb{R}$, такой, что для всех $a \in \mathbb{R}$ $a + 0 = a$.

4) Для всякого $a \in \mathbb{R}$ найдётся *противоположный элемент* $b \in \mathbb{R}$, такой, что $a+b = 0$ (его обычно обозначают через $-a$).

5) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *ассоциативности по умножению*:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

6) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *коммутативности по умножению*:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

7) Существует *нейтральный элемент относительно операции умножения* $1 \in \mathbb{R}$, такой, что для всех $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 1 = a$.

8) Для всякого $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ найдётся *обратный элемент* $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, такой, что $a \cdot b = 1$ (его обычно обозначают через a^{-1}).

Отметим, что эти свойства означают, что множество действительных чисел является *абелевой группой по сложению*, а множество всех действительных чисел без нуля является *абелевой группой по умножению.*

9) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *дистрибутивности*:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Множества, на котором выполнены эти девять свойств, называется *полем.* Помимо этих девяти свойств есть ещё два.

10) Для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$ либо $a \le b$, либо $b \le a$, то есть любые два элемента $\mathbb{R}$ можно сравнить (множество, где сравнимы любые два элемента, называется *линейно упорядоченным*). При этом выполнены два свойства:
а) для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, таких, что $a \le b$ выполнено $a + c \le b + c$;
б) для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R},\ c \ge 0$ таких, что $a \le b$ выполнено $a \cdot c \le b \cdot c$.

11) На множестве вещественных чисел выполнен принцип полноты.

Отметим, что первые десять свойств выполнены и на множестве рациональных чисел, а вот свойство 11, как следует из примера 2, не выполнено.

Для вещественных чисел определена функция $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0 \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Неплохим упражнением будет доказать следующее **неравенство треугольника**, справедливое для всех вещественных чисел: $|a + b| \le |a| + |b|$; кроме того, можно вывести из этого неравенства полезное следствие, также справедливое для любых действительных a и $b : ||a| - |b|| \le |a + b|$. Последнее неравенство можно получить из неравенства треугольника, используя следующее свойство модуля: $|x| = \max\{x, -x\}$.

Ниже мы проверим, что свойства 1 – 11 выполнены на множестве всех бесконечных десятичных дробей (на примере некоторых свойств, так как все проверять пришлось бы долго), которые, таким образом, и будут составлять множество $\mathbb{R}$.

Бесконечные десятичные дроби

Из школьного курса математики известно, что любое рациональное число представляется в виде бесконечной периодической десятичной дроби (см., например, учебник по алгебре для 7 класса под редакцией С. М. Никольского). Например, $5 = \frac{5}{1} = 5.(0), \frac{1}{6} = 0.1(6), \frac{15}{7} = 2.(142857)$. Заметим, что если знаменатель рационального числа представляет собой произведение степеней чисел 2 и 5, то такое рациональное число является периодической дробью, период которой может быть записан как с помощью числа 0, так и с помощью числа 9. Например, $0.5 = 0.5(0) = 0.4(9)$. Мы условимся всегда использовать период из числа 0, то есть запретим периоды, состоящие из числа 9. При таком ограничении мы можем утверждать, что любое рациональное число единственным образом представляется в виде периодической десятичной дроби. Верно и обратное (можно попробовать доказать это в качестве упражнения): любой периодической десятичной дроби соответствует некоторое рациональное число.

Кроме периодических десятичных дробей, бывают, конечно, и непериодические. Например, таковой является дробь 0.101101110.... Этой дроби не соответствует никакое рациональное число. Числа, записываемые в виде непериодических десятичных дробей, называются иррациональными. Объединение множества рациональных и иррациональных чисел называется множеством действительных (или вещественных) чисел, то есть **вещественное число** – это бесконечная (периодическая или непериодическая) десятичная дробь. Нам нужно проверить выполнение свойств 1 – 11. Мы не будем подробно останавливаться на всех свойствах, а рассмотрим только некоторые из них. Проверку остальных можно найти в литературе, указанной в описании курса.

Для таких дробей мы будем использовать запись

$$\pm a_0.a_1a_2a_3..., a_0 \in \mathbb{N}_0, a_j \in \{0, 1, 2, ..., 9\}, j \in \mathbb{N}.$$

Напомним, что дроби с числом 9 в периоде мы не рассматриваем. Число $\pm 0.000...$ – это число 0. Числа со знаком плюс (обычно отбрасываемым) называются положительными, а со знаком минус – отрицательными. На множестве десятичных дробей вводится отношение порядка, при котором число 0 больше любого отрицательного числа и меньше любого положительного, а положительные числа сравниваются следующим образом: $a_0.a_1a_2a_3... \leq b_0.b_1b_2b_3...$ если и только если эти числа равны или существует такой разряд k, что $a_j = b_j (j = 0, 1, 2, ..., k-1)$ и $a_k < b_k$ (лексикографический порядок). Этот порядок естественным образом переносится на отрицательные дроби. Таким образом, про любые две различные десятичные дроби можно сказать, какая из них больше, то есть множество всех таких дробей является линейно упорядоченным.

На множестве десятичных дробей можно определить сложение и умножение. Можно проверить, что все свойства арифметических операций для десятичных дробей выполнены, но мы не будем на этом останавливаться. Однако докажем теорему, в которой устанавливается справедливость свойства 11.

Теорема 1. *На множестве бесконечных десятичных дробей с введённым выше отношением порядка выполнен принцип полноты.*

Доказательство. Пусть подмножество A множества вещественных чисел лежит левее подмножества B. Если A состоит только из неположительных чисел, а B – только из неотрицательных, то эти множества разделяет 0.

Если в A есть положительные числа, то B состоит только из положительных чисел, поэтому минимальное значение целой части дробей, принадлежащих множеству B, не меньше 0. Выберем среди всех неотрицательных целых чисел, с которых начинаются элементы B, минимальное и обозначим его через b_0. Далее рассмотрим все элементы множества B, начинающиеся с числа b_0, и выберем из чисел в первых разрядах после запятой минимальный. Обозначим его b_1. Теперь рассмотрим все элементы множества B, начинающиеся с b_0, b_1, и выберем минимальное из чисел во вторых разрядах (b_3) и т.д.

Построим число $c = c_0.c_1c_2c_3...$, где $c_0 = b_0, c_1 = b_1$ и т. д. По построению $c \leq b$ для всякого элемента b из B.

С другой стороны, если бы нашёлся такой элемент $a \in A$, что $c \leq a$ и $c \neq a$, то существовал бы разряд k, для которого $a_k > c_k = b_k$, и $a_0 = c_0 = b_0, ..., a_{k-1} = b_{k-1}$, что означало бы наличие в A элементов, которые больше элементов из B. Тогда мы бы получили противоречие с тем, что A лежит левее B. Поэтому $a \leq c$ для любого $a \in A$, и c разделяет множества A и B.

Если множество B содержит отрицательные элементы, то все элементы множества A отрицательны. Тогда мы рассмотрим все неположительные целые числа, с которых начинаются элементы множества A, выберем из них максимальный, затем выберем все те элементы из A, которые начинаются с этого максимального и возьмём минимальное число в первом разряде после запятой у этих элементов и т.д. Действуя по аналогии со случаем, когда в A есть положительные элементы, снова построим число c, разделяющее элементы множеств A и B. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Контрольный вопрос: почему при построении числа c не может возникнуть период из девяток?

Обратим ещё внимание, что доказано лишь существование числа c, но ничего не сказано о том, единственно ли такое число. Будет полезно проверить, что для множеств из примера 2 такое число единственно, а также привести примеры множеств, для которых разделяющих чисел больше одного. Существуют ли пары подмножеств во множестве действительных чисел, одно из которых левее другого, и для которых существует конечное число разделяющих элементов, большее 1? В дальнейшем мы будем называть десятичную дробь действительным числом.

Отметим одно полезное следствие принципа полноты.

Предложение 1. ***(Аксиома Архимеда).*** *Для любого положительного вещественного числа a существует такое натуральное число n, что $na \geq 1$ (с помощью кванторов: $\forall\, a \in \mathbb{R}\, \wedge a > 0 \exists\, n \in \mathbb{N} :\ na \geq 1$).*

Желающие могут доказать это утверждение в качестве упражнения.