Лекция 2

Лемма о вложенных отрезках

Пусть даны два вещественных числа a и b, причём $a \le b$. Множество

$$I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x \le b\}$$

называется **отрезком** множества действительных чисел. **Длиной** отрезка $[a, b]$ назовём число $|I| = |[a, b]| := b - a$.

Определение 1. *Пусть $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ – занумерованное множество отрезков на вещественной прямой и пусть $I_{n+1} \subset I_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда такое множество называется последовательностью вложенных отрезков. Если при этом среди этих отрезков есть отрезки сколь угодно малой длины (то есть $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall\ n > N |I_n| < \varepsilon$), то говорят, что задана последовательность стягивающихся отрезков.*

Теорема 1. ***(Лемма о вложенных отрезках).*** *1) Всякая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку.*
2) Если эта последовательность является последовательностью стягивающихся отрезков, то общая точка единственна.

Доказательство. 1) Так как отрезки вложенные, то множество A всех левых концов отрезков $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ обладает тем свойством, что $a_n \le a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и множество B всех правых концов отрезков $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ обладает тем свойством, что $b_n \ge b_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, $a_n \le b_m$ при всех $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$, так как иначе (то есть если $a_n > b_m$) отрезки $[a_m, b_m]$ и $[a_n, b_n]$ не пересекались бы, что противоречит тому, что дана система вложенных отрезков. Таким образом, A левее B, поэтому по принципу полноты существует число $c \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенствам $a_n \le c \le b_m$ при всех $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ (а значит, и при $n = m$), поэтому $c \in I_n$ при всех при всех $n \in \mathbb{N}$.
2) Пусть теперь длины отрезков стремятся к нулю, то есть имеем последовательность стягивающихся отрезков. Уже доказано, что общая точка c есть. Предположим, что есть ещё одна общая точка c' и пусть $c' > c$. Тогда длины всех отрезков не могут быть меньше числа $c' - c > 0$, что противоречит тому, что длины отрезков стремятся к нулю. Поэтому у стягивающихся отрезков ровно одна общая точка. □

Построение вещественной прямой

Рассмотрим геометрическую интерпретацию действительных чисел.

Рациональные числа обычно представляют точками на прямой: отмечается точка ноль, являющаяся началом отсчёта, а затем вправо от этой точки откладывают единичный отрезок, правый конец которого соответствует числу 1. Любое натуральное число можно теперь получить, откладывая нужное число раз единичный отрезок от числа 1 вправо. Разделив единичный отрезок на q равных частей (это мы умеем делать, так как можем получить точку, соответствующую любому натуральному числу, а тогда можно на другой прямой отложить натуральное число q, а затем воспользоваться теоремой Фалеса) и взяв одну такую часть, мы получим отрезок длины $1/q$, а затем, откладывая такой отрезок вправо от нуля p раз, получим точку, соответствующую обыкновенной дроби p/q. Симметрично отражая все построенные точки относительно начала отсчёта, можем получить точки, соответствующие на прямой всем рациональным числам.

Построим на прямой положительное вещественное число $a = a_0, a_1a_2....$ Для этого сначала отметим на прямой точку, соответствующую целому неотрицательному числу a_0, а затем разобьём отрезок $[a_0, a_0 + 1]$ на 10 равных частей. После этого выберем $(a_1 + 1)$-й отрезок из этих десяти, разобьем его снова на 10 равных частей, выберем из этих новых десяти отрезков (a_2+1)-й и т.д.. Построенные отрезки обладают тем свойством, что любой, построенный на очередном таком шаге, содержится во всех, построенных на предыдущих шагах. По лемме о вложенных отрезках все эти отрезки имеют единственную общую точку. Эта точка и соответствует числу a.

При такой геометрической интерпретации можно сказать, что принцип полноты означает, что при выбранных начале отсчёта (то есть точке, соответствующей нулю) и единичном отрезке любая точка прямой соответствует единственному действительному числу, а всякое действительное число соответствует единственной точке на прямой. Прямая, точкам которой поставлены в соответствие действительные числа, называется **вещественной прямой**.

Напомним, что на прямой множество, которое мы назвали отрезком, – это множество всех точек, лежащих между двумя данными, включая сами эти точки, а интервал – множество всех точек между двумя данными, не включая концы.

Определим ещё некоторые множества на прямой. Множества точек вида

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\} \text{ и } [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$$

называются **полуинтервалами.** Интервалы, отрезки и полуинтервалы называют конечными числовыми промежутками.

Множества точек вида $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\}$ и $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < a\}$ называются **открытыми лучами,** а множества вида $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq a\}$ и $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\}$ называются **замкнутыми лучами.**

Кроме того, **окрестностью** точки a вещественной прямой называется любой интервал, содержащий эту точку. Для окрестностей точки a обычно используют обозначения $U(a), V(a)$. Если число $\varepsilon > 0$, то **ε-окрестностью** точки a называется интервал вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Другими словами, это интервал с центром в точке a длины 2ε. Обозначения: $U_\varepsilon(a), V_\varepsilon(a)$.

Очевидно, что для любой окрестности точки a можно указать содержащуюся в ней ε-окрестность, и, наоборот, в любой ε-окрестности точки a содержится некоторая её окрестность.

Проколотой ε-окрестностью точки a называется объединение $(a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$. Обозначения: $\overset{\circ}{U}_\varepsilon (a), \overset{\circ}{V}_\varepsilon (a)$.

Функции

Определение 2. *Декартовым произведением $X \times Y$ множеств X и Y называют множество всевозможных пар (x, y), где первый элемент x каждой пары принадлежит X, а второй ее элемент y принадлежит Y.*

Определение 3. *Функцией f, определённой на множестве X и принимающей значения во множестве Y, называется подмножество декартова произведения $X \times Y$, если выполнено следующее условие: $\forall x \in X$ $\exists!$ пара $(x, y) \in f$. При этом пишут $y = f(x)$. Элемент y называют образом x, элемент x – прообразом элемента y, для функции принято обозначение $f : X \to Y$.*

Множество $f(X)$ всех элементов $f(x) \in Y$ называется образом множества X. Короче, это записывается так:

$$f(X) = \{y \in Y | y = f(x),\ x \in X\},$$

а само X называется прообразом множества $f(X)$.

В курсе мы будем изучать в основном функции, определённые на числовых множествах и принимающие числовые значения. Определим некоторые основные виды функций, которые будем использовать в дальнейшем.

Определение 4. *1) Функция $f : X \to Y$ называется сюръекцией (накрытием), если для всякого $y \in Y$ существует такое $x \in X$, что $y = f(x)$.*
2) Функция $f : X \to Y$ называется инъекцией (вложением), если из равенства $f(x) = f(y)$ следует, что $x = y$.
3) Функция, являющаяся одновременно сюръекцией и инъекцией, называется биекцией или взаимно-однозначным отображением.

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая задаётся равенством $f(x) = x$, является биекцией (проверьте!), а функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемая равенством $g(x) = x^2$, – нет, так как из равенства $a^2 = b^2$ не следует равенство $a = b$. Можно также сказать, что g не является сюръекцией. Функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемая равенством $h(x) = x^3 - x$, даёт пример сюръекции, не являющейся инъекцией, а функция $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $p(x) = e^x$, является инъекцией, но не сюръекцией (проверьте это!).

Числовые последовательности

Определение 5. *Функция, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, определённая на множестве натуральных чисел и принимающая значения во множестве действительных чисел, называется числовой последовательностью. Значения $f(n)$ функции f обозначают a_n. Последовательность также часто обозначают $\{a\}_{n=1}^{\infty}$, отождествляя её с множеством её значений.*

Числа $a_1, a_2, a_3, ...$ называются элементами последовательности. Элементов последовательности всегда бесконечно много, но разные элементы могут представляться одним и тем же вещественным числом. Например, a_n может равняться 1 при любом $n \in \mathbb{N}$, и тогда элементы последовательности запишутся друг за другом в виде $\{1, 1, 1, 1...\}$.

Последовательности могут задаваться различными способами, и сейчас мы обсудим некоторые из них.

Первый и самый распространённый способ задания последовательности – с помощью формулы. Например, $a_n = 1/n, b_n = (-1)^n, c_n = 5$ и т.д..

Второй способ – задание последовательности с помощью рекуррентной формулы: задаётся явно несколько начальных элементов последовательности, а остальные выражаются с помощью уравнения через уже заданные. Например, $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. С помощью этой формулы мы можем найти $a_3 = 1 + 1 = 2, a_4 = 2 + 1 = 3, a_5 = 3 + 2 = 5$ и так далее. Эта последовательность называется последовательностью Фибоначчи в честь знаменитого итальянского математика Леонардо Пизанского. Ещё один пример последовательности, заданной рекуррентно: $a_1 = 1, a_n = 1 + \frac{1}{1+a_{n-1}}$. Читатели, встречавшие понятие цепной дроби при изучении математики, могут узнать в этой последовательности набор подходящих дробей для числа, известного как золотое сечение и равного $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Интересна связь этой последовательности с введённой чуть выше последовательностью Фибоначчи.

Подробнее об этом можно прочитать в книге Г. Б. Аракеляна "Математика и история золотого сечения". При изучении цепных дробей очень полезной будет книга В. И. Арнольда "Цепные дроби".

Этим не исчерпываются все возможные способы задания последовательностей. Мы остановимся на ещё одном важном примере – десятичном приближении числа.

Пример 1. *Как известно, число* $\sqrt{2} = 1,4142135623...$ *является иррациональным. Зададим последовательность* $\{a\}_{n=1}^{\infty}$ *следующим образом:* $a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41, a_4 = 1.414...$. *Отметим, что* $|\sqrt{2} - a_n| < 10^{-n+1}$ *и что любой элемент нашей последовательности является рациональным числом. Такая последовательность называется* ***последовательностью десятичных приближений*** *числа* $\sqrt{2}$. *Таким же способом можно приблизить и любое действительное число. Например, дробь* $0.(5)$ *приближается числами 0.4, 0.49, 0.499... .*

Вообще, с любым действительным числом можно отождествить последовательность приближений этого числа. При таких приближениях существенны вопросы погрешности приближения, выбора наилучшего способа приближения. Из этого примера также видно, что в окрестности любого действительного числа обязательно существуют рациональные числа, то есть нет ни одного интервала вещественной оси, в котором отсутствовали бы точки, соответствующие рациональным числам. Если в любом интервале вещественной оси лежат точки некоторого множества, то говорят, что это множество *всюду плотно* в $\mathbb{R}$. Таким образом, *множество рациональных чисел всюду плотно в вещественной оси.*