Лекция 6

Критерий Коши

В этом разделе мы получим для последовательности условия, равносильные существованию предела этой последовательности. Равносильность означает, что выполнение этих условий влечёт существование предела, а существование предела влечёт выполнение условий.

Утверждения, равносильные некоторым фактам, называют критериями этих фактов. Например, критерием того, что треугольник прямоугольный, может служить то, что сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны. Это значит, что если треугольник прямоугольный, то условия для квадратов сторон выполнены, и если условия для квадратов сторон выполнены, то это прямоугольный треугольник.

Отметим, однако, что бывают утверждения, являющиеся следствиями каких-либо фактов, из которых сами эти факты не следуют (необходимые признаки). Например, из того, что каждое из слагаемых делится на 3, следует, что сумма делится на три, но из того, что сумма делится на 3 не следует, что на 3 делится каждое из слагаемых. Есть также и утверждения, из которых следуют факты, но если эти утверждения не выполнены, то факты все равно могут выполняться (достаточные признаки). Например, если мы складываем два чётных числа, то результат – это, конечно, чётное число, но чётным результат может быть не только в этом случае, а и при сложении двух нечётных чисел, то достаточным признаком того, что сумма чётная, является чётность каждого из слагаемых.

Сформулируем важное определение фундаментальной последовательности. Как мы затем докажем, только такие последовательности и будут сходиться.

Определение 1. *Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n,\ m > N$ выполняется неравенство $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Более коротко:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n,\ m > N\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Фундаментальность последовательности означает, что, начиная с некоторого натурального N, *все* элементы последовательности с номерами, большими, чем N, находятся друг от друга на расстоянии, меньшем произвольно выбранного малого положительного числа.

Приведём примеры.

Пример 1. *1) Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ фундаментальна, так как при любом $\varepsilon > 0$ $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq 2\max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}$, поэтому при любом $\varepsilon > 0$ достаточно взять $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$, тогда $2\max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} < \varepsilon$.*
2) Последовательность $a_n = (-1)^n$ не является фундаментальной, так как при $\varepsilon = 1$ для любого натурального числа N найдутся два таких номера $n = N+1$ и $m = N+2$, что элементы с этими номерами удовлетворяют неравенству $|a_{N+1} - a_{N+2}| = 2 > 1$.

В пункте 2 примера 1 мы использовали определение того, что последовательность не является фундаментальной. Запишем это определение с помощью кванторов.

$$\exists \varepsilon > 0:\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n,\ m > N:\ |a_n - a_m| \geq \varepsilon.$$

Сформулируем, наконец, основную теорему этого раздела – критерий Коши.

Теорема 1. *Последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет предел* ***тогда и только тогда****, когда она фундаментальна.*

Выделенная жирным шрифтом фраза как раз и означает, что теорема является критерием. Из достаточности следует, что **мы можем выяснить, что у последовательности существует предел, не вычисляя этот предел непосредственно.** Существуют последовательности, где нахождение предела является гораздо более сложной задачей, чем проверка фундаментальности последовательности. Особенно хорошо это будет видно, когда мы начнём изучать бесконечные суммы, то есть ряды. Перейдём к доказательству.

Доказательство. **Необходимость.** Итак, дано, что есть предел, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Нужно доказать, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Для этого выберем такое $\varepsilon > 0$, что, начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$, при всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда при любых $n, m > N$ имеем: $|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, то есть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет определению фундаментальной последовательности.

Достаточность. Дано, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Требуется доказать, что у неё есть предел.

Покажем, что последовательность ограничена. Действительно, при $\varepsilon = 1$ найдётся такое натуральное N, что при $n = N+1, m > N$ выполнено неравенство $|a_m - a_{N+1}| < 1$, а это равносильно тому, что $a_{N+1} - 1 < a_m < a_{N+1} + 1$. Так как N – фиксированное число, то можно утверждать, что, начиная с номера $N+1$, наша последовательность принадлежит интервалу $(a_{N+1} - 1, a_{N+1} + 1)$, то есть является ограниченной. За пределами интервала могут лежать только числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_N$. Тогда при всех натуральных n имеем

$$a_n \leq \max\{a_1, a_2, a_3, ..., a_{N+1} + 1\} \text{ и } a_n \geq \min\{a_1, a_2, a_3, ..., a_{N+1} - 1\}.$$

Таким образом, ограниченность доказана.

Тогда, в силу леммы Больцано – Вейерштрасса найдётся сходящаяся подпоследовательность $b_k = a_{n_k}$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Обозначим её предел через A.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > N_1$ $|b_k - A| < \varepsilon$. Для этого же $\varepsilon > 0$ существует такое $N_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $n, m > N_2$ $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Пусть $M := \max\{N_1, N_2\}$, тогда при всех $n > M$ и $k > M$ имеем $n_k > M$ (объясните, почему!) и

$$|a_n - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ доказывает равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. □

Замечание. Если вспомнить первое определение предела, то необходимость условия легко понять с геометрической точки зрения. Действительно, какой бы малый интервал, содержащий предел, мы бы ни взяли, по определению все элементы последовательности, начиная с некоторого, лежат в этом интервале, а тогда расстояние между любыми двумя элементами последовательности не превосходит длины этого интервала. Достаточность же означает, что если все элементы последовательности, начиная с некоторого, умещаются в сколь угодно малом по длине интервале, то такая последовательность имеет предел.

Приведём теперь примеры применения критерия Коши при выяснении вопроса о существовании предела последовательности.

Пример 2. *1) Рассмотрим последовательность* $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$. *Докажем, что она не является фундаментальной. Для этого нужно доказать, что при некотором* $\varepsilon > 0$ *для любого натурального* N *найдутся такие натуральные* $m, n > N$, *что* $|a_m - a_n| \geq \varepsilon$.

Действительно, пусть задано натуральное N. Возьмём $n = N+1,\ m = 2N+2 = 2n$. Тогда получим:

$$|a_{2n}-a_n| = \left|1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{2n}-1-\frac{1}{2}-...-\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right| \geq$$

$$\geq \underbrace{\left|\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}\right|}_{n\ \text{слагаемых}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для любого натурального N найдутся два таких номера $m, n > N$, что $|a_m - a_n| \geq \frac{1}{2}$, то есть последовательность не является фундаментальной, поэтому у неё нет предела.

2) Рассмотрим теперь последовательность $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$. Найти её предел достаточно сложно. Этот предел равен $\frac{\pi^2}{6}$ и на то, чтобы его впервые вычислить, когда-то ушло много лет. Первым сумел посчитать этот предел Леонард Эйлер. Задача на нахождение этого предела называется "Базельская проблема". Интересующиеся могут прочитать про неё.

Польза критерия Коши состоит в том, что мы можем выяснить, есть ли у последовательности предел, не вычисляя это предел непосредственно. Для этого нужно доказать, что при всех $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное N, что при всех $m, n > N$, что $|a_m - a_n| < \varepsilon$. В данном случае имеем, полагая $m = n + p$, где p натуральное:

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}+...+\frac{1}{(n+p)^2}-1-\frac{1}{2^2}-...-\frac{1}{n^2}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{(n+1)^2}+...+\frac{1}{(n+2)^2}+...+\frac{1}{(n+p)^2}\right| <$$

$$< \left|\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+...+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{n+p-1)}-\frac{1}{n+p}\right| =$$

$$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},$$

откуда можем сделать вывод, что если $1/n < \varepsilon$, то есть $N = [1/\varepsilon]$, то $|a_m - a_n| < \varepsilon$, то есть последовательность фундаментальна, а поэтому сходится.