Лекция 8

Первый замечательный предел

Предложение 1. ***(Первый замечательный предел).*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Доказательство. Пусть $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Тогда справедливы неравенства (см. рис. 1):

$$S_{\triangle OMB}<S_{\text{круг. сектор } OMB}<S_{\triangle OCB}\Leftrightarrow(1\cdot\sin x)/2<\frac{\pi}{2\pi}x<(1\cdot\operatorname{tg}x)/2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\leq\frac{x}{\sin x}\leq\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow\cos x\leq\frac{\sin x}{x}\leq 1.$$

Отметим, во-первых, что получено полезное неравенство $\sin x<x$, справедливое при всех $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

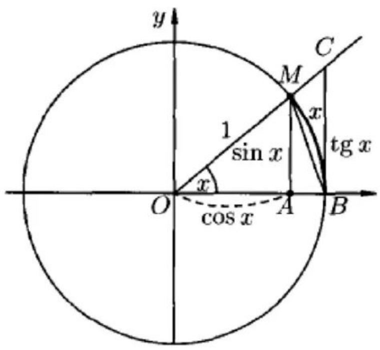

Рис. 1: Первый замечательный предел

Далее,

$$1-\cos x>1-\frac{\sin x}{x}>0\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2}>1-\frac{\sin x}{x}>0\Rightarrow$$

$$2\cdot\frac{x}{2}>2\sin\frac{x}{2}>2\sin^2\frac{x}{2}>1-\frac{\sin x}{x}>0\Rightarrow\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<|x|,$$

причём последнее неравенство справедливо при всех $x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$.

Если взять произвольное $\varepsilon>0$, то, полагая $\delta=\min\left\{\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right\}$, получим, что при всех $0<|x|<\delta$ выполнено неравенство $\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$, а это по определению означает, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

□

Отметим, что если $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$, то неравенства $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ также выполнены, так как все входящие в них функции чётны. Отсюда получаем полезное неравенство $|\sin x|\leq|x|$, справедливое при всех $x\in\mathbb{R}$, причём равенство выполнено только при $x=0$. Действительно, при $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ выполнено неравенство $\sin x\leq x$, но при этом при $x\geq\frac{\pi}{2}$ неравенство очевидно справедливо, так как синус не превосходит 1. Если же $x\leq 0$, то имеем

$$\sin(-x)\leq -x\Leftrightarrow\sin x\geq x.$$

Объединяя неравенства при $x\geq 0$ и при $x\leq 0$, получаем неравенство $|\sin x|\leq|x|$. Из этого неравенства по лемме о зажатом пределе следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

Приведём полезные примеры применения доказанного предложения при вычислении пределов.

Пример 1. *1) Найдём* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}$. *Пусть* $g(y)=\frac{\sin y}{y}$, *а* $f(x)=5x$. *Тогда функция* g *определена на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *а* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *По предложению 1* $\lim\limits_{x\to 0} g(y)=1$. *Кроме того, очевидно, что* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, *и при этом ни в какой проколотой окрестности нуля* f *не принимает значение* 0. *Рассмотрим произвольную проколотую окрестность нуля (считаем* $\tau>0$*)*

$$\overset{\circ}{U}_\tau(0)=\{y\in\mathbb{R}\mid -\tau<y<\tau,\ y\neq 0\}.$$

Тогда в ней содержится проколотая окрестность нуля

$$\overset{\circ}{U}_{\tau/5}(0)=\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{\tau}{5}<x<\frac{\tau}{5},\ x\neq 0\}.$$

Таким образом, все условия теоремы о пределе композиции выполнены, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1.$$

2) Найдём $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$. *Для этого отметим, что*

$$|1-\cos x|=|2\sin^2\frac{x}{2}|\leq|2\sin\frac{x}{2}|\leq 2\cdot\frac{|x|}{2}=|x|,$$

откуда для произвольного $\varepsilon>0$, *полагая* $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, *получим, что при всех* $0<|x|<\delta$ *выполнено неравенство* $|\cos x-1|<\varepsilon$, *то есть* $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.
3) Пользуясь арифметикой пределов и первым замечательным пределом, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

4) Найдем предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$. *Для этого сделаем замену* $t=\operatorname{arctg} x$, *откуда по определению арктангенса* $\operatorname{tg} t=x$. *Так как* $x\to 0$, *то* $\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t}\to 0$, *потому мы можем считать, что* $t\to 0$ *(более строгое обоснование будет получено, когда мы докажем, что арктангенс непрерывен в нуле). Таким образом, используя теорему о пределе композиции и пункт 2, имеем*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg} t}=1.$$

5) Аналогично пункту 3 получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

6) Используя формулы тригонометрии, арифметику пределов и первый замечательный предел, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Отметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$, *так как если положить* $y=\frac{x}{2}$, *то будут выполнены все условия теоремы о пределе композиции.*

Определение 1. *Пусть функция* g *определена и не равна нулю на множестве* E, f *определена на множестве* E, a *– предельная точка множества* E. *Говорят, что функции* f *и* g ***эквивалентны*** *при* $x\to a$, *если* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. *Обозначение:* $f\sim g,\ x\to a$.

Таким образом, в предложении 1 и примере 3 было доказано, что при $x \to 0$

$$\sin x \sim x, 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},\ \operatorname{tg} x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \operatorname{arctg} x \sim x.$$

Отметим, что, например, $\sin x \sim \operatorname{arctg} x$ при $x \to 0$, так как в силу арифметики пределов

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}} = 1,$$

поэтому имеем цепочку эквивалентностей

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim x$$

при $x \to 0$.

Выражаясь нестрогим языком, мы можем сказать что эквивалентные функции "приближенно равны"в достаточно малой проколотой окрестности точки a, а это иногда позволяет находить пределы. Приведём пример использования эквивалентностей, но более подробно к этой теме вернёмся при изучении вопроса сравнения бесконечно малых.

Пример 2. *Опираясь на рассуждения пункта 1 примера 3, получим*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{arctg} 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{7x}{5x} = \frac{7}{5}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\sin 7x \sim 7x,\ \operatorname{tg} 5x \sim 5x,\ x \to 0.$

В этом случае эквивалентности прекрасно помогли сократить вычисления, но иногда такой подход приводит просто к неверному ответу. Продемонстрируем это в следующем пункте.

2) Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$. *Если снова использовать эквивалентности, то получим* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^3} = 0$. *Разумеется, этот ответ неверный, а причину легко объяснить: величины* $\sin x$ *и* $\operatorname{tg} x$ *эквивалентны при* $x \to 0$, *но вовсе не равны. При этом отметим, что* ***если имеются произведения и частные бесконечно малых величин, а сумм и разностей нет, то применение эквивалентностей приводит к верным ответам.*** *Например, сомножитель можно заменить на эквивалентный ему: если ищем* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ *и* $f \sim h$ *при* $x \to a$, *то*

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} h(x)\cdot g(x)$$

Искомый же предел вычисляется так:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Второй замечательный предел

Предложение 2. ***(Второй замечательный предел).***
1) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; *2)* $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Доказательство. 1) Сначала рассмотрим случай $x \to +\infty$. Заметим, что

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \to e \text{ и } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) \to e \text{ при } n \to +\infty,$$

то есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_1 \in \mathbb{N} : \forall\ n > N_1\ \left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - e \right| < \varepsilon,$$

а также (при этом же ε)

$$\exists\ N_2 \in \mathbb{N} : \forall\ n > N_2\ \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e \right| < \varepsilon,$$

поэтому при $N = \max\{N_1,\ N_2\}$ и при $x > 1 + N$ мы имеем $[x] > N$, а тогда

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e + \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} : \forall\ x > N\ \left| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right| < \varepsilon,$$

то есть по определению $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Теперь рассмотрим случай $x \to -\infty$. Положим $y = -x$, тогда $y \to +\infty$, и мы можем применить теорему о пределе композиции:

$$e = \lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Объединяя случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, получаем, что $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

2) В этом случае сделаем замену $\frac{1}{x} = p$. Тогда $p \to \infty$ и мы снова можем применить теорему о пределе композиции:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{p\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p = e.$$

□

Приведём примеры применения второго замечательного предела. Отметим при этом, что при вычислениях пределов ниже мы, кроме теоремы о переделе композиции, будем использовать непрерывность некоторых функций. Позже эта непрерывность будет доказана независимо.

Пример 3. *1)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln{(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \ln \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$. *Здесь переход к пределу по знаком логарифма возможен именно в силу непрерывности логарифма в точке* e.

2) Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. *Положим* $e^x - 1 = y$, *откуда получим* $x = \ln(1+y)$, *поэтому* $y \to 0$ *и в силу теоремы о пределе композиции получаем*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1.$$

3) Воспользуемся теоремой о пределе композиции для вычисления предела $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$. *Имеем:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x}.$$

Положим $\ln(1+x) = t$, *откуда получим* $x = e^t - 1$ *и при* $x \to 0$ *также и* $t \to 0$. *Таким образом,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^t - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha(e^{\alpha t} - 1)/\alpha t}{(e^t - 1)/t} = \frac{\alpha}{1} = \alpha.$$