## Лекция 10

### $O$-символика и сравнение бесконечно малых

**Определение 1.** *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется бесконечно малой при $x \to a$, где $a$ является предельной точкой множества $E$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ (или $-\infty$, или $+\infty$), то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$. Везде $x \in E$.*

**Определение 2.** *Пусть функции $f$ и $g$ определены на множестве $E$, $a$ – предельная точка множества $E$. Говорят, что функция $f$ является бесконечно малой по сравнению с функцией $g$ при $x \to a$, если $f(x) = h(x)g(x)$ и $h$ – бесконечно малая функция при $x \to a$. Если при этом сами функции $f$ и $g$ являются бесконечно малыми при $x \to a$, то говорят, что функция $f$ –* ***бесконечно малая более высокого порядка*** *по сравнению с $g$ при $x \to a$. Тот факт, что $f$ является бесконечно малой по сравнению с $g$ при $x \to a$, записывают в виде $f = o(g),\ x \to a$ (читается "$f$ равно о-малое от $g$ при $x$, стремящемся к $a$"). Запись $f = o(1),\ x \to a$ означает, что $f$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$. Таким образом, запись $f = o(g),\ x \to a$ равносильна $f = o(1)g,\ x \to a$.*

**Предложение 1.** *Запись $f = o(g),\ x \to a$ равносильна также тому, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (при этом считаем, что $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $a$).*

*Доказательство.* Действительно, если $f = o(g),\ x \to a$, то по определению

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} h(x) = 0,$$

так как $h(x) \to 0$ при $x \to a$. Обратно, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то функция $h := \frac{f}{g}$ по определению является бесконечно малой при $x \to a$, а тогда справедливо равенство $f(x) = h(x)g(x)$, то есть $f = o(g),\ g \to a$. $\square$

**Пример 1.** *1) При $m > n > 0$ $x^m = o(x^n),\ x \to 0$, так как $x^m = x^{m-n} \cdot x^n$ и $x^{m-n} \to 0$.*
*2) При $m > n > 0$ $x^n = o(x^m),\ x \to +\infty$, так как $x^n = x^{n-m} \cdot x^m$ и $x^{n-m} \to 0$.*
*3) Как мы знаем, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Это равносильно тому, что $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$, что, в силу предложения 1, равносильно равенству $\sin x - x = o(x),\ x \to 0$, а последнее равенство равносильно*

$$\sin x = x + o(x),\ x \to 0. \tag{1}$$

Равенство (1) является **асимптотическим**, то есть оно справедливо *не при фиксированных значениях $x$*, а при стремлении $x$ к нулю. Этим равенством выражается тот факт, что при стремлении аргумента к нулю синус и аргумент отличаются на величину, стремящуюся к нулю быстрее, чем сам аргумент и чем сам синус. Говоря неформально, можно сказать, что в очень маленькой окрестности нуля синусоида и прямая $y = x$ "практически сливаются".

Используя пределы, найденные в предыдущих лекциях, можем выписать следующие асимптотические равенства, которые выводятся, как и равенство (1):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),\ x \to 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x),\ x \to 0, \tag{3}$$

$$\arcsin x = x + o(x),\ x \to 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x),\ x \to 0, \tag{5}$$

$$e^x = 1 + x + o(x),\ x \to 0, \tag{6}$$

$$\ln(1+x) = x + o(x),\ x \to 0, \tag{7}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x),\ x \to 0,\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

**Замечание 1.** Обратим внимание, что если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности $a$, то равенства (1) – (8) верны, если $x$, заменить на $\alpha(x)$. Это можно доказать, сделав замену $t = \alpha(x)$ и применив теорему о пределе композиции.

Воспользуемся выписанными равенствами для вычисления пределов.

**Пример 2.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(-\frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-\frac{1}{2} + o(1)) + o(1)(-\frac{1}{2} + o(1))x^2}{x^2(1 + o(1))} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-\frac{1}{2} + o(1)) + o(1)x^2}{x^2(1 + o(1))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + o(1) + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(-\frac{1}{2} + o(1))}{\lim\limits_{x\to 0}(1 + o(1))} = -\frac{1}{2}.$$

*При применении формулы (1) к синусу из знаменателя и формулы (4) к логарифму мы использовали замечание 1, полагая, что $\alpha(x) = x^2$ для синуса и $\alpha(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ для логарифма. Кроме того, мы пользовались определением 2, а в особенности той его частью, в которой объясняется значение символа $o(1)$.*

Про свойства "о-малых"мы ещё поговорим на семинарах.

**Определение 3.** *Пусть функции $f$ и $g$ определены на множестве $E$, $a$ – предельная точка множества $E$. Если при $x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполнено равенство $f(x) = h(x)g(x)$, где $h$ определена и ограничена на $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то пишут $f = O(g),\ x \to a$ ("$f$ есть О-большое от $g$ при $x$ стремится к $a$").*

Аналогично определению 2, запись $f = O(1),\ x \to a$ означает, что $f$ является ограниченной на пересечении некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ и области определения $E$. Запись $f = O(g),\ x \to a$ в этих обозначениях будет означать, что $f = O(1)g,\ x \to a$.

**Пример 3.** *1) $\frac{1}{x} + \sin x = O(1),\ x \to +\infty$, так как функция $\frac{1}{x} + \sin x$ ограничена на любом луче $(b, +\infty),\ b > 0$.*
*2) Верно также асимптотическое равенство $\frac{1}{x} + \sin x = O(x),\ x \to +\infty$ потому что $\frac{1}{x} + \sin x = (\frac{1}{x^2} + \frac{\sin x}{x})x$ при $x > 0$, а $\frac{1}{x^2} + \frac{\sin x}{x}$ является бесконечно малой, а значит, ограниченной при $x \to +\infty$.*
*3) В силу того, что $\frac{1}{x^2} + \frac{\sin x}{x}$ бесконечно малая, мы имеем равенство*

$$\frac{1}{x} + \sin x = o(x),\ x \to +\infty.$$

*4) Функции $\frac{1}{x} + \sin x$ и $\frac{1}{x^2} + \frac{\sin x}{x}$ не являются ограниченными в любой окрестности нуля, поэтому при $x \to 0$ равенства пунктов 1) – 3) неверны.*
*5) В силу того, что $\frac{1}{x} + \sin x = (1 + x\sin x)\frac{1}{x}$ и $(1 + x\sin x)$ ограничена в любой окрестности нуля, будем иметь асимптотическое равенство $\frac{1}{x} + \sin x = O(\frac{1}{x}),\ x \to 0$.*

Напомним, что если функции $f$ и $g$ определены на множестве $E$, $a$ – предельная точка множества $E$, то говорят, что функции $f$ и $g$ **эквивалентны** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (при этом считаем, что $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $a$).

**Упражнение.** Докажите, что $f \sim g,\ x \to a \Leftrightarrow f = g + o(g),\ x \to a$ (см. пример 1, пункт 3)).

Как уже обсуждалось в предыдущих лекциях, эквивалентности можно использовать при вычислении некоторых пределов, но такой результат иногда приводит к ошибкам. Укажем некоторые примеры.

**Пример 4.** *Выше мы вычисляли предел* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin(x^2)}$. *Если "в лоб"использовать замечание 1 и эквивалентности, то получим:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

*В этом случае эквивалентности прекрасно помогли сократить вычисления, так как, как уже обсуждалось в предыдущих лекциях, бесконечно малые, которые мы заменили на эквивалентные, являлись множителями или делителями* ***всего*** *выражения под знаком предела. Однако иногда такой подход приводит к неверному ответу. Продемонстрируем это в следующем пункте.*
*2) Рассмотрим предел* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$. *Здесь в числителе стоит* ***разность бесконечно малых, которые эквивалентны***. *Если снова использовать эквивалентности, то получим* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^3} = 0$. *Разумеется, этот ответ неверный, а причину легко объяснить: разность* $\sin x - x$ стремится *к 0, но вовсе не* равна *нулю, как получается при применении эквивалентностей. Однако ещё раз отметим, что* ***если имеются произведения и частные бесконечно малых величин, а сумм и разностей нет, то применение эквивалентностей приводит к верным ответам.***

Как же всё-таки вычислить предел из пункта 2 примера 4? Безусловно, можно пробовать использовать асимптотическое равенство (1), и мы увидим сейчас, что хотя оно позволяет прийти к выводу, что искомый предел может быть равен ненулевому числу, для вычисления значения предела этого недостаточно.

Действительно, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+o(x)-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^3}$. Однако при $x \to 0$ $o(x)$ может быть равно, например, $x^2$ (и тогда предел бесконечный) или $x^3$ (тогда предел равен 1), или $x^4$ (тогда ответ 0). Другими словами, запись $o(x)$ не даёт достаточное количество информации для вычисления предела.

При изучении дифференциального исчисления мы выведем асимптотические равенства, которые содержат больше информации и позволяют не только считать более сложные пределы, но и производить приближенные вычисления с большой точностью. Эти равенства без доказательства будут приведены уже сейчас.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n),\ x \to 0; \tag{9}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+2}),\ x \to 0; \tag{10}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0; \quad (11)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + o(x^n),\ x \to 0; \quad (12)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ...+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot ... \cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot ... \cdot(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n),\ x \to 0\ (\alpha \in \mathbb{R}). \quad (13)$$

Как мы видим, в этих формулах берётся больше слагаемых, чем в равенствах (1) – (8), что даёт в определённом смысле более хорошее приближение суммы к функции. Характер приближения сумм на примере синуса приведён на рис. 1.

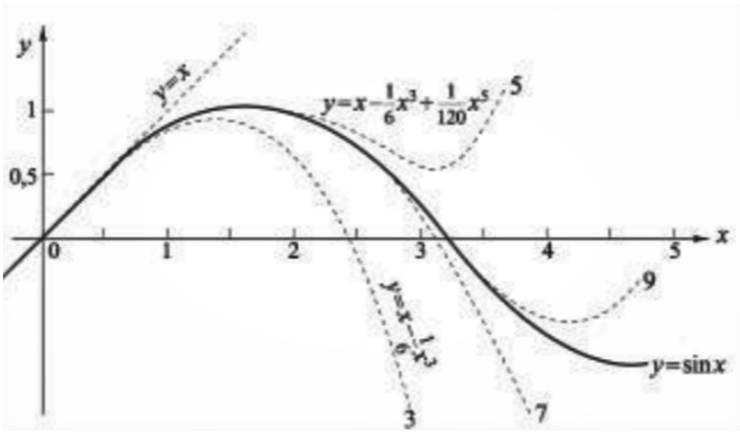


Рис. 1: Иллюстрация поведения сумм для $\sin x$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Как мы видим, разница между многочленом и синусом в окрестности нуля тем меньше, чем больше степень приближающего многочлена.

Вернёмся теперь к нахождению предела. Нам достаточно использовать формулу (10) при $n = 2$ : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3(-\frac{1}{6} + o(1))}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}(-\frac{1}{6} + o(1)) = -\frac{1}{6}$.

На семинарах мы встретим ещё примеры на применение формул (9) – (13).

**Пример 5.** *В прошлой лекции мы выяснили, что* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = -\frac{1}{2}$. *Тогда, используя равенство 10 при* $n = 2$, *получим при* $x \to 0$ :

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{x^3}{2} + o(x^3) \ \Leftrightarrow\ \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Полученной для тангенса формулой также можно пользоваться при вычислении пределов.