Лекция 13

Производная и дифференциал

Определение 1. *Функция f, определённая в некоторой окрестности точки a, называется* ***дифференцируемой*** *в точке a, если существуют такие число A и функция α, что при всех h из некоторой проколотой окрестности нуля выполнено равенство*

$$f(a+h)-f(a)=Ah+\alpha(h)h, \tag{1}$$

где $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$. При этом A и α зависят и от точки a, поэтому часто равенство (1) записывают в виде

$$f(a+h)-f(a)=A(a)h+\alpha(a,h)h.$$

Определение 2. *Функция $h\mapsto Ah$ называется* ***дифференциалом*** *функции f в точке a. Она обозначается $df(a)$ или $df|_{x=a}$, то есть $df(a)(h)=df(h)|_{x=a}=Ah$.*

Ещё раз подчеркнём, что равенство записано в фиксированной точке a, то есть оно зависит от точки a. Другими словами, число A, вообще говоря, разное при разных a.

Здесь символ $df(a)$ нужно воспринимать как обозначение функции, то есть как *цельный* символ.

Отметим два очевидных наблюдения для функции $h\mapsto Ah$: во-первых

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\ df(a)(\lambda h)=A\lambda h=\lambda Ah,$$

а во-вторых

$$df(a)(h_1+h_2)=A(h_1+h_2)=Ah_1+Ah_2.$$

Так как здесь A – число, то свойства очевидны. Однако позже мы увидим, что дифференциал функции многих переменных также обладает аналогичными свойствами. Выполнение этих свойств по определению означает, что *дифференциал является линейной функцией от h.*

Пример 1. *1) Пусть $f(x)=x$. Тогда $f(a+h)-f(a)=(a+h)-a=h=1\cdot h+0\cdot h$. Из этого представления имеем: $A=1,\alpha(h)=0,dx(h)|_{x=a}=h$.*
2) Пусть $f(x)=x^2$. Тогда $f(a+h)-f(a)=(a+h)^2-a^2=2ah+h^2=2ah+h\cdot h$, то есть $A=2a,\ d(x^2)(h)|_{x=a}=2ah,\ \alpha(h)=h$.
3) Пусть $f(x)=x^3$. Тогда $f(a+h)-f(a)=(a+h)^3-a^3=3a^2h+3h^2a+h^3=3a^2h+(3ah+h^2)h$ то есть $A=3a^2,\ d(x^3)(h)|_{x=a}=3a^2h,\ \alpha(h)=3ah+h^2$.

Дадим теперь определение производной функции.

Определение 3. *Если существует предел $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, то он называется производной функции f в точке a. Другая форма записи предела: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Производная функции f в точке a обозначается символом $f'(a)$ или $\frac{df}{dx}(a)$ (второе обозначение позже обсудим подробно).*

В следующем предложении устанавливается связь между дифференциалом и производной.

Предложение 1. *Функция f дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда в точке a существует производная этой функции $f'(a)$. При этом $df(h)|_{x=a}=f'(a)h$.*

Доказательство. **Необходимость.** Если функция f дифференцируема, то справедливо равенство

$$f(a+h)-f(a)=Ah+\alpha(h)h,\ \lim_{h\to 0}\alpha(h)=0.$$

Разделив обе части этого равенства на h, получим

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A+\alpha(h).$$

Переходя к переделу при $h\to 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$, получим, что $f'(a)=A$.
Достаточность. Если функция f имеет производную, то есть существует предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a),$$

то по определению предела справедливо равенство

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)+\alpha(h),$$

где $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$. Домножив обе части этого равенства на h, мы получим равенство из определения дифференцируемой функции. □

Обратим внимание, что из определения дифференциала и доказанного предложения следует, что дифференциал функции f в точке a определён однозначно, так как всегда $A=f'(a)$.

Так как из примера 1, пункта 1 вытекает, что $dx(h)=h$ в любой точке a, то дифференциал можно записать в виде $df|_{x=a}=f'(a)dx$. Действительно, при любом h из проколотой окрестности нуля, о которой говорилось в определении дифференциала, справедливы равенства

$$df(h)|_{x=a}=f'(a)dx(h)|_{x=a}=f'(a)h,$$

откуда следует и равенство самих линейных функций $df(a)$ и $f'(a)dx$. При этом вторая линейная функция представляет собой произведение числа $f'(a)$ и дифференциала dx функции $f(x)=x$. Разделив в равенстве $df(a)=f'(a)dx$ обе части на dx, получим обозначение производной $f'(a)$ в виде отношения двух дифференциалов:

$$f'(a)=\frac{df(a)}{dx}.$$

Справа стоит функция, равная отношению двух линейных функций, значение которой на любом h из проколотой окрестности нуля в силу предложения выше равно $f'(a)$. Именно в таком смысле следует понимать полученное равенство, а отсюда понятно и второе обозначение для производной. Так как речь идёт о производной в точке a, то есть дифференциалы в отношении справа вычисляются в точке a, то пишут ещё $f'(a)=\frac{df}{dx}(a)$. Если речь идёт о производной, рассматриваемой сразу на множестве точек, то есть если изучают зависимость производной от точки при изменении этой точки, то возникает функция, которую принято обозначать f' или df/dx.

Мы чаще будем пользоваться обозначением f', а обозначение df/dx используется, например, в курсе дифференциальных уравнений.

Изучим *геометрическую интерпретацию производной и дифференциала*. Из равенства $h=x-a$ получим, что дифференцируемая функция может быть записана в виде $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\alpha(x)(x-a)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Это значит, что в некоторой окрестности точки a функция f приближается функцией $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$. Таким образом, локально (то есть в некоторой окрестности точки a) график функции f выглядит "почти"как прямая. Сама прямая $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ называется *касательной* к графику функции f в точке a. Производная $f'(a)$ является тангенсом угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox. На рисунке 1 красным цветом изображена касательная. Обратим внимание, что график функции и касательной неразличимы

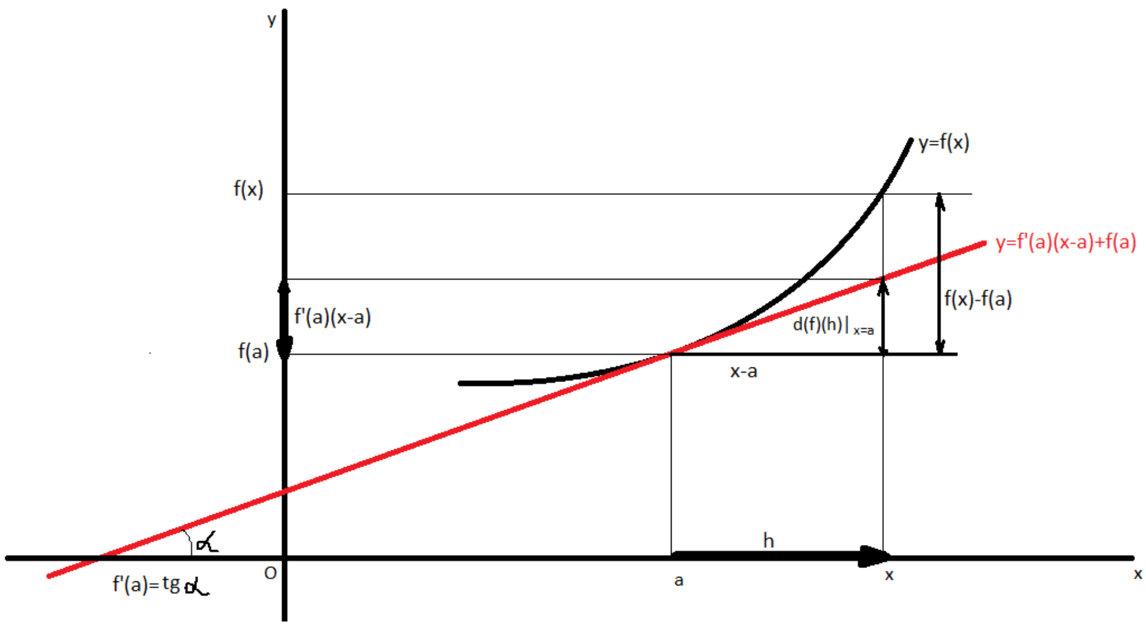

Рис. 1: Функция "сливается"с касательной.

в некоторой окрестности. Приведём несколько примеров на вычисление производных с помощью определения производной.

Пример 2. *1) Пусть $f(x) = e^x$. Найдём $\frac{df}{dx}(a)$. Имеем по определению:*

$$\frac{df}{dx}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^a.$$

Так как это верно в любой точке области определения, то при всех $x \in \mathbb{R}$ $(e^x)' = e^x$.

2) Пусть $f(x) = \cos x$. Тогда

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.$$

Совершенно аналогично проверяется, что $\sin'(x) = \cos x$.

С помощью свойств дифференцируемых функций, которые будут выведены ниже, и теорем о производной сложной и обратной функции мы получим производные других элементарных функций и запишем *таблицу производных.* Пока в этой таблице три функции из примера выше.

Непрерывность и дифференцируемость

Докажем простое следствие определения дифференцируемых функций.

Предложение 2. *Пусть функция f дифференцируема в точке a. Тогда f непрерывна в точке a.*

Доказательство. Из определения дифференцируемости следует, что

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \to f(a),\ x \to a,$$

то есть предел функции в точке a равен её значению в этой точке, что по определению означает непрерывность. $\square$

Следующий пример показывает, что обратное неверно: непрерывная в точке функция может быть недифференцируемой в этой точке. Согласно предложению 1 это равносильно тому, что такая функция в этой точке не имеет производную.

Пример 3. *Функция $y = |x|$ недифференцируема в нуле. Действительно,*

$$\lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1,\ \text{а}\ \lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h}{h} = 1.$$

Если бы производная в нуле существовала, то есть если бы существовал предел, то это было бы равносильно существованию и равенству односторонних пределов. Таким образом, у функции $y = |x|$ не существует производной при $x = 0$, что равносильно тому, что эта функция недифференцируема в нуле.

При этом отметим, что функция $y = |x|$ всё же является непрерывной в точке $x = 0$. Существуют функции, **непрерывные на всей прямой, но не дифференцируемые ни в одной точке.**

Построение примера такой функции мы не будем обсуждать, так как не обладаем пока нужным для этого математическим аппаратом, однако коротко опишем пример *(материал про построение такой функции не является обязательным)*.

Для этого рассмотрим следующую последовательность функций:

$$f_0(x) = \sin x,\ f_1(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 8x,\ f_2(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 64x,\ \ldots,$$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\sin 8^k x.$$

Покажем, что эта последовательность функций имеет предел при каждом $x \in \mathbb{R}$, то есть областью сходимости является вся вещественная прямая. Действительно, при фиксированном x

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\frac{1}{2^k}\sin 8^k x\right| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \le 2,$$

то есть при каждом фиксированном x элементы последовательности $g_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left|\frac{1}{2^k}\sin 8^k x\right|$ ограничены сверху, что по по теореме Вейерштрасса означает сходимость этой последовательности. Тогда нетрудно показать, что и у последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ есть предел. Этот предел можно записать в виде формальной бесконечной суммы $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\sin 8^k x$, которая, как показано выше, определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, мы можем определить функцию

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\sin(8^k x),$$

определённую для любых вещественных чисел. Кроме того,

$$|w(x) - f_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\sin 8^k x| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n},$$

поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = [\log_2(1/\varepsilon)]$, что при всех $n > N$ и при всех $x \in \mathbb{R}$ $|w(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Все функции $f_n(x)$ непрерывны, так как представляют собой суммы непрерывных синусов, а тогда можно доказать, что $w(x)$ непрерывна.

При этом функция $w(x)$ ни в одной точке вещественной оси не является дифференцируемой.

Функция $w(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(8^n x)$ называется **функцией Вейерштрасса.** Отметим, что вопросы, связанные с построением непрерывной во всех точках, но нигде не дифференцируемой функцией, подробно изучались в XIX веке, причём изначально предпринимались попытки доказать, что всякая непрерывная функция дифференцируема практически во всех точка, за исключением некоторых изолированных. В 1861 году Бернхард Риман на одной из своих лекций привёл следующий контрпример:

$$r(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}.$$

Исследование этой функции на дифференцируемость – сложная задача, но в 1970 году всё же было доказано, что в некоторых рациональных точках эта функция дифференцируема

Пример Вейерштрасса появился в 1872 году, причём было дано строгое доказательство непрерывности этой функции и того, что она нигде не дифференцируема. Отметим, что существуют и другие примеры функций с такими свойствами.

Доказательство того, что эта функция нигде не дифференцируема, мы проводить не будем, но для наглядности приведём её график.

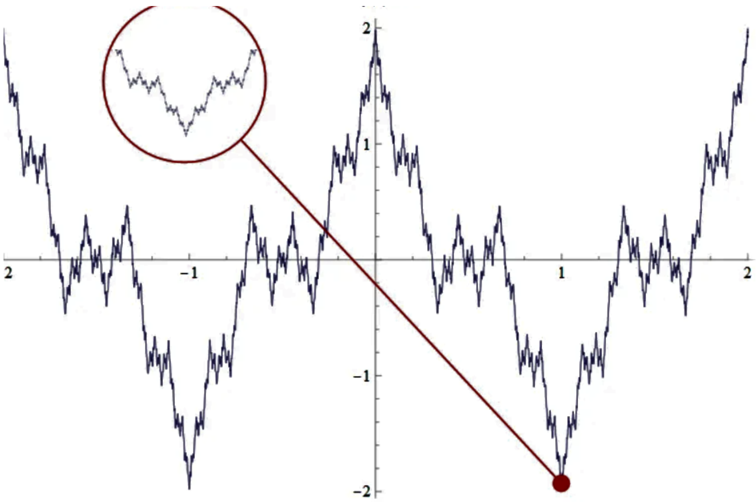

Рис. 2: функция Вейерштрасса w

Функция Вейерштрасса является самоподобной в том смысле, что увеличенные фрагменты графика в точности повторяют сам график. Ни в одной точке нельзя построить касательную, что и говорит о том, что функция Вейерштрасса недифференцируема. Конечно, это ни в коем случае не является строгим доказательством, а лишь позволяет лучше понять, как устроена такая функция (*конец необязательного материала*).