Лекция 17

Локальная формула Тейлора

Определение 1. *Многочленом Тейлора n раз дифференцируемой в точке a функции называется многочлен*

$$T_n(x) = T_n(x; f, a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Отметим, что производные в точке a многочлена Тейлора совпадают с производными самой функции f в точке a (проверьте это).

Теорема 1. *Пусть функция f n раз дифференцируема в точке a. Тогда*

$$f(x) - T_n(x) = o((x-a)^n),\ x \to a.$$

Доказательство. В силу предложения 1 лекции 12 нам нужно доказать, что

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Применяя к этому пределу правило Лопиталя, получим после $(n-1)$-кратного дифференцирования числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)} =$$
$$= \frac{1}{n!}\left(\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{(x-a)} - f^{(n)}(a)\right) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a)) = 0.$$

□

В доказательстве нельзя было ещё раз продифференцировать, так как производная порядка n в точке $x \neq a$ может быть не определена, ибо в условии сказано, что функция n раз дифференцируема в самой точке a, а это значит (см. определение производной n-го порядка), что в окрестности точки a определены только первые $n-1$ производные.

Таким образом, n раз дифференцируемая в точке a функция хорошо приближается своим многочленом Тейлора в достаточно малой окрестности точки a. Можно записать равенство из условия теоремы в таком виде: $f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n),\ x \to a$. Так как это равенство справедливо при достаточно близких к a значениях x, то само равенство называется *локальной формулой Тейлора.* Ещё одно название: *формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.* Под остаточным членом подразумевается $o((x-a)^n)$, то есть разница между функцией и её многочленом Тейлора.

Отметим также, что если $n = 1$, то локальная формула Тейлора превращается в равенство из определения дифференцируемой функции (см. лекцию о дифференцируемых функциях).

Теперь с помощью этой теоремы легко обосновываются асимптотические равенства (9) – (13) из предыдущих лекций.

1) Докажем, что если $a = 0$, а $f(x) = \sin x$, то

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n),\ x \to 0. \tag{9}$$

Действительно, при $x = 0$ справедливы равенства $e^x = (e^x)' = (e^x)'' = ... = (e^x)^{(n)} = 1$. Беря в качестве $f^{(k)}(a)$ значения k-й производной экспоненты в нуле при $k = 1, \ ..., \ n$ получим формулу (9).

2) Отметим, что для чётных производных синуса в нуле верны равенства

$$\sin 0 = \sin''(0) = ... = \sin^{(2k)}(0) = 0,$$

а для нечётных в нуле – равенства

$$\sin'(0) = \cos 0 = 1, \ \sin'''(0) = -\cos 0 = -1, \ ..., \ \sin^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}\cos 0 = (-1)^{k-1}$$

при всех натуральных k, то есть чётные производные синуса в точке $a = 0$ равны нулю, а нечётные в той же точке чередуются, то есть первая равна 1, вторая равна -1, третья снова равна 1 и так далее. Поэтому для синуса получаем формулу

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}), \ x \to 0. \tag{10}$$

3) Для косинуса формула Тейлора выводится также, как для синуса (проделайте это в качестве упражнения). В итоге получаем

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}), \ x \to 0; \tag{11}$$

3) Найдём последовательные производные логарифма:

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}, \ (\ln(1+x))'' = \frac{-1}{(1+x)^2},$$
$$(\ln(1+x))''' = \frac{(-1)^2 \cdot 1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \ (\ln(1+x))^{(4)} = \frac{(-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}.$$

Отсюда с помощью метода математической индукции устанавливается, что

$$(\ln(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n},$$

а в нуле тогда имеем

$$(\ln(1+x))^{(n)}_{x=0} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+0)^n} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!.$$

Тогда слагаемое многочлена Тейлора $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ при $f(x) = \ln(1+x), \ a = 0$ примет вид $\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, а формула Тейлора для логарифма будет такова:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n), \ x \to 0; \tag{12}$$

5) Аналогично тому, как это сделано для логарифма, обоснуйте формулу

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot ... \cdot (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n), \ x \to 0 \ (\alpha \in \mathbb{R}). \tag{13}$$

Итак, теперь равенства, выписанные нами при изучении O-символики обоснованы. Это пять основных равенств, а с их помощью можно получать локальные формулы Тейлора для других функций.

Формула Тейлора с с остаточным членом в общей форме Лагранжа.

Если разницу между функцией и её многочленом Тейлора записать в виде формы Пеано, то никакой дополнительной информации, кроме той, что эта разница есть бесконечно малая величина при $x \to a$, мы не имеем. Иногда (например, при оценке погрешности) важно иметь более подробную информацию о поведении выражения

$$R_n(x; f, a) := f(x) - T_n(x; f, a).$$

Эту информацию можно получить, имея более подробные сведения о поведении самой функции f.

Теорема 2. *(**Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа**). Пусть в каждой точке отрезка с концами a и x функция f имеет n непрерывных производных, а в каждой точке интервала с концами a и x f дифференцируема $n+1$ раз. Тогда*

$$R_n(x; f, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где c – точка из интервала с концами a и x.

Доказательство. Наша цель – применить теорему Коши из лекции.

Хитрость состоит в том, что нужно рассмотреть вспомогательную функцию, которая получается заменой в многочлене Тейлора функции f фиксированной точки a на переменную t, изменяющуюся в пределах отрезка $[a, x]$.

Итак, рассмотрим функцию

$$G(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

и вычислим производную этой функции:

$$G'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \right) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Пусть также $g(t) = (x-t)^{n+1}$. Функция G очевидно удовлетворяет условиям теоремы Коши на отрезке с концами a и x. Функция g непрерывна на отрезке $[a, x]$, дифференцируема на интервале (a, x) и $g'(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in (a, x)$. Таким образом, для функций G и g выполнены все условия теоремы Коши.

Применяя к функциям $G(t)$ и $g(t)$ теорему Коши на отрезке с концами a и x, получим:

$$\frac{G(x) - G(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{G'(c)}{g'(c)},$$

где c – точка на интервале с концами a и x. При этом $G(x) = f(x)$, а $G(a) = T_n(x; f, a)$, поэтому

$$\frac{G(x) - G(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - T_n(x; f, a)}{-(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{-n!(n+1)(x-c)^n}(x-c)^n,$$

откуда

$$f(x) - T_n(x; f, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

чем всё и доказано. □

Форма Лагранжа примечательна тем, что выглядит, как очередное слагаемое в многочлене Тейлора, с той лишь разницей, что производная функции вычисляется в точке c, лежащей между a и x.

Можно записать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в виде

$$f(x) - f(a) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(k)(a)}}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Эта формула является обобщением формулы конечных приращений (то есть теоремы Лагранжа).

Отметим, что хотя форма Лагранжа наиболее употребима, но иногда её недостаточно для подходящей точности оценки остаточного члена.

Есть, однако и ещё более точные (то есть содержащие больше информации о поведении разности $f(x) - T_n(x; f, a)$) формы остаточного члена. Например, если положить в доказательстве $g(t) = x - t$, то получим *остаточный член в форме Коши:*

$$R_n(x; f, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a),\ c \in (a, x).$$

В качестве упражнения проведите доказательство теоремы для этого случая.

Пример 1. *Зафиксируем $x > 0$ рассмотрим на отрезке $[0, x]$ функцию $f(x) = e^x$. К ней применима теорема 2. Так как производная e^x любого порядка равна e^x, то*

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \frac{x^n \cdot e^x}{(n+1)!} \to 0, n \to \infty,$$

при некотором $c \in (0, x)$. Так как $c < x$, то $e^c < e^x$, откуда выше и появился знак неравенства. Стремление к нулю возникает, так как факториал стремится к бесконечности быстрее любой натуральной степени (проверьте это!) Таким образом, чем больше n, тем разность

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

меньше. Отметим, что бесконечная сумма $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ в точности равна e^x. Равенство

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

справедливо на самом при всех $x \in \mathbb{R}$, и правая часть называется ***рядом Тейлора*** *функции e^x. Ряды Тейлора есть и у других элементарных функций из равенств (9)-(13). Подробнее ряды Тейлора будут изучаться на втором курсе.*