Лекция 9

Критерий Коши существования предела функции

Сейчас мы докажем обобщение критерия Коши для последовательности на случай функций *вещественного* аргумента. Этот критерий является обобщением аналогичного результата для последовательностей, так как последовательность – функция *натурального* аргумента, а натуральные числа – подмножество вещественных.

Полезно ещё раз обратить внимание, как работают определения пределов по Коши и Гейне.

Теорема 1. ***(Критерий Коши.)*** *Пусть функция f определена на множестве E, a – предельная точка множества E. Функция f имеет предел в точке a* ***тогда и только тогда****, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любых чисел $x, y \in E$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x-a| < \delta$, $0 < |y-a| < \delta$ выполнено неравенство $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. С помощью кванторов:*

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0 :\; \forall\, x, y \in \overset{\circ}{U}_\delta\,(a) \cap E\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда по определению предела по Коши $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E\cap \overset{\circ}{U}_\delta\ (a)\ |f(x) - A| < \varepsilon/2$. Если $y \in E\cap \overset{\circ}{U}_\delta\ (a)$, то $|f(x)-f(y)| = |f(x)-A+A-f(y)| \leq |f(x)-A|+|f(y)-A| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ такова, что $a_n \in E \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда при любом $\delta > 0$, найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \in E\cap \overset{\circ}{U}_\delta\ (a)$ при всех $n > N$, из чего по условию следует, что последовательность $\{f(a_n)\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна, а тогда существует предел этой последовательности. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$.

Рассмотрим теперь другую последовательность, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$, и пусть для неё также выполнены условия, которым удовлетворяет последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Если мы докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = A$, то существование предела функции f в точке a будет следовать из определения предела по Гейне. Отметим, что последовательность $\{a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ...\}$ также сходится к числу a, поэтому при любом $\delta > 0$, найдётся такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что и a_n, и b_n принадлежат множеству $E\cap \overset{\circ}{U}_\delta\ (a)$ при всех $n > N_1$, поэтому последовательность $\{f(a_1), f(b_1), f(a_2), f(b_2), ..., f(a_n), f(b_n), ...\}$ фундаментальна, а тогда у неё есть предел. Тогда у этой последовательности ровно один частичный предел, который и совпадает с её пределом. Выше мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$, то есть подпоследовательность последовательности $\{f(a_1), f(b_1), f(a_2), f(b_2), ..., f(a_n), f(b_n), ...\}$ сходится к A. Тогда и вся эта последовательность сходится к A, поэтому её подпоследовательность $\{f(b_n)\}_{n=1}^\infty$ сходится к тому же пределу, что и завершает доказательство. □

Теорема Вейерштрасса

Пусть функция f определена на множестве E и a – предельная точка множества E. Пусть $E_a^+ = \{x \in E : x > a\}$, т. е. $E_a^+ = E \cap (a, +\infty)$. Аналогично, $E_a^- = E \cap (-\infty, a)$. Тогда точка a является предельной для хотя бы одного из множеств E_a^- и E_a^+. Дадим определение **односторонних пределов** функции f в точке a.

Определение 1. *Пусть a – предельная точка множества E_a^+. Число A называется* ***пределом справа*** *функции f в точке a, если*

$$\lim_{E_a^+ \ni x \to a} f(x) = a,$$

то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E_a^+ \cap \overset{\circ}{U}_\delta\ (a)$ $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$ или $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$. Аналогично определяется ***предел слева*** *функции f в точке a, обозначаемый $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$ только множество E_a^+ в определении заменяется на E_a^-. Пределы справа и слева называются также* ***односторонними пределами.***

Иными словами, предел справа – это предел, при котором x стремится к a, *всегда оставаясь больше* a, а предел слева – тот, при котором x стремится к a, всегда оставаясь меньше a. При этом, разумеется, x всегда принадлежит множеству E. Отметим, что если a – предельная точка только для множества E_a^- или E_a^+ (ещё раз отметим, что тогда она всё равно является предельной для E), то мы можем говорить только о существовании соответствующего одностороннего предела.

Упражнения. 1) Запишите определения односторонних пределов с помощью кванторов.
2) Дайте определения односторонних пределов, пользуясь терминологией последовательностей, то есть по Гейне.

Дадим теперь определение монотонной на множестве E функции.

Определение 2. *Если для любых таких $x_1, x_2 \in E$, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция f называется* ***неубывающей*** *на множестве E. Если выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется* ***возрастающей*** *на множестве E. Если выполнены противоположные неравенства, то функция называется соответственно* ***невозрастающей*** *и* ***убывающей*** *на множестве E. Функция любого из четырёх указанных видов называется* ***монотонной*** *на множестве E функцией.*

Упражнение. Всегда ли сумма монотонных функций монотонна? (*Ответ: нет*).

Определение 3. *Функция f называется ограниченной на множестве M, если она определена на этом множестве и существует такая константа $C > 0$, что $|f(x)| \le C$ при всех $x \in E$.*

Сформулируем теорему, которая обобщает теорему Вейерштрасса для последовательностей.

Теорема 2. *(**Теорема Вейерштрасса**). 1) Пусть функция f определена на множестве E и a – предельная точка множества E_a^-. Пусть f не убывает и ограничена сверху на множестве E_a^-. Тогда существует предел слева функции f в точке a и имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \sup\limits_{x\in E_a^-} f(x)$.*
2) Пусть функция f не убывает и ограничена на множестве E. Пусть a – предельная точка множества E_a^+. Тогда существует предел справа функции f в точке a и имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{x\in E_a^+} f(x)$.

Доказательство. 1) По определению точной верхней грани,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in E_a^- : M - \varepsilon < f(x_0) \le M,$$

где $M := \sup\limits_{x \in E_a^-} f(x)$. Так как функция f неубывающая, то $\forall x \in E_a^- : x > x_0$ (что означает, что $x_0 < x < a$ и $x \in E$) выполнены неравенства $M - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le M$, т. е. при любом $\varepsilon > 0$ мы нашли такое $\delta := a - x_0 > 0$, что при всех $x \in E_a^- \cap \overset{\circ}{U}_\delta (a)$ выполнено неравенство $|f(x) - M| < \varepsilon$, т. е. по определению

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \sup_{x \in E_a^-} f(x) = M.$$

Пункт 2) докажите в качестве упражнения. $\square$

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для невозрастающих функций.