МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

В.Г.ЧИРСКИЙ,А.И.КОЗКО,Л.М.ЛУЖИНА

2022

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам первого курса химического факультета МГУ.

<u>Отображения и их свойства.</u>

<u>Определение 1.</u> Назовём бинарное отношение $\mathrm{E} \subset \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ ***функциональным***, если для каждого $x \in A$ сечение $E(x)$ содержит не более одного элемента.

<u>Определение 2.</u> Если отношение E^{-1}, симметричное к отношению $E \subset A \times B$, также является функциональным, то отношение E называется ***взаимно однозначным.***

<u>Определение 3.</u> Если для каждого $x \in A$ сечение $E(x)$ содержит ровно один элемент, то функциональное отношение ***всюду определено***.

С функциональным отношением непосредственно связано понятие отображения.

<u>Определение 4.</u> ***Отображение***, обозначим его f, сопоставляет каждому элементу, называемому ***аргументом отображения***, для которого сечение $E(x)$ - непустое множество, единственный элемент $f(x)$ подмножества $E(x)$ множества B. Этот элемент $f(x)$ называется ***образом***. Множество тех элементов $x \in A$, для которых существует $f(x)$, называется ***областью определения*** отображения f.

<u>Определение 5.</u> Если отображение f определено на всём множестве A, то говорят, что задано ***отображение*** A ***в*** B.

<u>Определение 6.</u> Множество образов элементов $x \in A$ при отображении f называется ***образом отображения***. Если $C \subset A$, то образ $f(C)$ определяется, как множество образов элементов $f(x), x \in C$.

<u>Определение 3.7.</u> Если образ совпадает со всем множеством B, то говорят, что задано отображение A на B, или что f - сюръективное отображение, или сюръекция. (При этом требование всюду определённости не является обязательным).

Определение 8. Если $D \subset B$, то $f^{-1}(D)$ обозначает ***прообраз множества*** $D \subset B$, т.е. множество тех элементов $x \in A$, для которых $f(x) \in D$.

Отметим очевидные свойства образа и прообраза:
$f\left(f^{-1}(D)\right) = D, f^{-1}(f(C)) \supset C.$

Определение 9. Если отношение E является взаимно однозначным, то отображение, соответствующее E^{-1}, называется ***обратным*** к f и обозначается f^{-1}. Если при этом отношение E всюду определено, то f называется ***инъективным отображением***, или ***инъекцией***. Если, кроме того, отображение ещё и ***сюръективно***, то оно называется ***биективным*** или биекцией.

Отметим, что выше мы использовали обозначение прообраза $f^{-1}(D)$ и в случаях, когда обратное к f отображение f^{-1} не существует. Если же обратное отображение существует, то прообраз $f^{-1}(D)$ можно рассматривать, как образ множества D при отображении f^{-1}.

Наиболее часто встречающимся функциональным отношением является обычная функция $y = f(x)$, определённая на некотором подмножестве X числовой прямой, значения которой образуют множество Y. Действительно, эту функциональную зависимость можно трактовать, как задание подмножества в множестве $X \times Y$, в которое входят те пары (x, y), для которых выполнено равенство $y = f(x)$. Изображение этого множества пар на плоскости носит название графика функции.