МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке показано, как формула Тейлора и правила Лопиталя используются при решении важных на практике задач

Формулы Тейлора. Правила Лопиталя – Бернулли

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и с остаточным членом в форме Пеано

Теорема. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа) *Пусть* $f(x)$*,* $f'(x)$*, ...,* $f^{(n)}(x)$ *непрерывны в окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0 *и пусть в* $\dot{U}(x_0)$ *существует* $f^{(n+1)}(x)$*. Тогда для любого* $x \in \dot{U}(x_0)$ *существует точка* ξ*, лежащая между* x_0 *и* x *такая, что*

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{n!}.$$

Примечание. В этом представлении функции $f(x)$ последнее слагаемое $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^{n+1}$ называется ***остаточным членом в форме Лагранжа***.

Замечание. Особенно часто формула Тейлора используется, когда $x_0 = 0$. Тогда $x = x_0 + \Delta x = \Delta x$ и

$$\Delta f(0) = df(0) + \frac{d^2 f(0)}{2} + \ldots + \frac{d^n f(0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\theta \Delta x)}{(n+1)!}.$$

Эту формулу часто называют также *формулой Маклорена* (Mac-Laurin).

Теорема. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (G.Peano)). *Пусть в окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0 *существуют и непрерывны* $f(x)$*, ...,* $f^{(n-1)}(x)$*. Пусть* $f^{(n)}(x)$ *существует в* $U(x_0)$ *и непрерывна в точке* x_0*. Тогда*

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + o((\Delta x)^n) \text{ при } \Delta x \to 0$$

Разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\mu$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), x \to 0,$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2}), x \to 0,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), x \to 0,$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n), x \to 0.$$
$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), x \to 0.$$

Примеры решения задач

Формула Тейлора имеет многочисленные приложения. Одно из них – вычисление значения функции с заданной точностью.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Пример 1. Вычислить значение $\sqrt[10]{1000}$ с точностью до 0,001.

Решение. Сначала подготовим задачу к применению формулы Тейлора. Для этого, зная, что $2^{10} = 1024$, перепишем вычисляемую величину в виде
$2 \cdot \sqrt[10]{\frac{1000}{1024}} = 2 \cdot \sqrt[10]{1 - \frac{24}{1024}} = 2\left(1 - \frac{3}{128}\right)^{1/10}$.
Используем биноминальное разложение при
$\mu = \frac{1}{10}, x = -\frac{3}{128}$.

Число n членов разложения выберем, исходя из заданной точности. Для этого найдем n такое, чтобы выполнялось неравенство:
$$\left|\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{10}-n\right)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\frac{1}{10}-n-1} \cdot \left(-\frac{3}{128}\right)^{n+1}\right| < 0{,}0005$$
(тогда при умножении на стоящий впереди коэффициент 2 получаем требуемую точность 0,001).
Очевидно, что:
$$\left|\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{10}-n\right)}{(n+1)!}\right| < \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{n+1};$$
Далее, точка ξ лежит между точками 0 и $-\frac{3}{128}$, поэтому $\frac{125}{128} < 1 + \xi < 1$ и
$$\left(\frac{128}{125}\right)^{n+1} > \left(\frac{128}{125}\right)^{n+1-\frac{1}{10}} > (1+\xi)^{\frac{1}{10}-n-1} > 1.$$
Следовательно,
$$\left|(1+\xi)^{\frac{1}{10}-n-1} \cdot \left(-\frac{3}{128}\right)^{n+1}\right| < \left|\left(\frac{128}{125} \cdot \frac{3}{128}\right)^{n+1}\right| = \left(\frac{3}{125}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{40}\right)^{n+1}.$$

Итак, абсолютная величина левой части неравенства (10) не больше, чем
$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{(40)^{n+1}}. \qquad (*)$$

Поэтому если число (*) окажется меньше, чем 0,0005, то и остаточный член формулы будет меньше 0,0005 и требуемая точность будет достигнута.
Сразу ясно, что при $n = 1$выполняется неравенство
$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{40^2} = \frac{1}{32000} < 0{,}0005.$$
Поэтому требуемую точность для приближенной величины даёт приближённая формула:
$$\sqrt[10]{1000} \approx 2 + \frac{2}{10} \cdot \left(-\frac{3}{128}\right) = 2 - \frac{3}{640}.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано очень полезна при вычислении пределов.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x - \sin x}{x - \sin x}$.

Решение. Как показано выше, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), x \to 0$. Поэтому
$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) = \frac{x^3}{3!} + o(x^4), x \to 0.$$
Далее, $\mathrm{tg}x - \sin x = \mathrm{tg}x(1 - \cos x)$. При $x \to 0$ выполняются асимптотические равенства $\mathrm{tg}x = x + o(x), 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Поэтому $\operatorname{tg}x(1-\cos x)=\left(x+o(x)\right)\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=\frac{x^3}{2}+o(x^3), x\to 0.$ В результате получаем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3!}+o(x^4)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{\frac{1}{3!}+o(x)}=\frac{3!}{2}=3.$

Отметим, что в этом примере мы сначала определили главный член в знаменателе рассматриваемой дроби. Он оказался равным $\frac{x^3}{3!}$, а весь знаменатель имел вид $\frac{x^3}{3!}+o(x^4), x\to 0$. Это означало, что в разложении функции, стоящей в числителе дроби, следовало найти лишь члены, степень которых не выше 3.

Пример 3. Определить главный член вида Cx^n при $x\to 0$ в разложении функции $\ln\cos(e^x-1)$ по формуле Тейлора.

Решение. $e^x-1=x+o(x), x\to 0$, $\cos t=1-\frac{t^2}{2}+o(t^3), t\to 0$, поэтому $\cos(e^x-1)=1-\frac{\left(x+o(x)\right)^2}{2}+o\left(\left(x+o(x)\right)^3\right)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2), x\to 0.$ Так как $\ln(1+z)=z+o(z), z\to 0$, окончательно находим $\ln\cos(e^x-1)=$ $=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2), x\to 0$, и поэтому главным членом при $x\to 0$ является $-\frac{x^2}{2}$.

Замечание. Выбор точности, с которой решается задача, очень важен. Если взять слишком много слагаемых, решение усложнится. Но если взять мало, то решение может оказаться совершенно неверным. Рассмотрим простой пример: оценить дробь $\frac{\pi}{3{,}1}$.

Так как $\pi\approx 3$, то $\frac{\pi}{3{,}1}\approx\frac{3}{3{,}1}<1.$

Но $\pi\approx 3{,}1$, поэтому $\frac{\pi}{3{,}1}\approx\frac{3{,}1}{3{,}1}=1.$

Если же взять с большей точностью $\pi\approx 3{,}14$, то $\frac{\pi}{3{,}1}\approx\frac{3{,}14}{3{,}1}>1.$

Подобные ошибки встречаются при использовании эквивалентностей и формулы Тейлора с недостаточной точностью. Рассмотрим пример: найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$. Использовав эквивалентность $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, получаем **неверное решение:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0.$$

Верное решение будет иметь вид: так как $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}+o(x^4)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}+o(x)\right)=\frac{1}{6}.$$

Напомним, что при $x \to 0$: $o(x^n) = \alpha(x) \cdot x^n$, где $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x) = 0$, то есть $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to 0$. Поэтому

$o(x^n) \cdot \big(o(x^m)\big) = o(x^{n+m})$ при $x \to 0$,

$o(x^n) \cdot x^m = o(x^{n+m})$ при $x \to 0$,

При $n > m$ выполняется

$o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^m)$ при $x \to 0$, в частности, $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$,

$\frac{o(x^n)}{o(x^m)} = o(x^{n-m})$ при $x \to 0$,

$o(1) = \alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to 0$.

Задача 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right) = -\frac{1}{2}$.

Задача 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+5x}-2\sqrt[4]{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1+5x)^{\frac{1}{3}}-2(1+(-x))^{\frac{1}{4}}}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}x+o(x)\right)+\left(1+\frac{1}{3}\cdot 5x+o(x)\right)-2\left(1+\frac{1}{4}\cdot(-x)+o(x)\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x+\frac{5}{3}x+\frac{1}{2}x+o(x)}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{8}{3}+o(1)\right) = \frac{8}{3}$.

В разбираемых задачах встречаются «не табличные разложения» функций, которые полезно запоминать хотя бы с небольшим количеством слагаемых.

Задача 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x-\arcsin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)-\left(x+\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}{x^2} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{x}{3}-\frac{x}{3!}+o(x^2)\right) = 0.$

Задача 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right)}{x^4} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}+o(1)\right) = -\frac{1}{12}$.

Задача 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)-(x+x^2)}{x^3} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x+(x^2)+\left(\frac{x^3}{2!}-\frac{x^3}{3!}\right)+o(x^3)-x-x^2}{x^3} =$

здесь использовано то, что при $x \to 0$ выполняется $x^n = x\cdot x^{n-1} = o(x^{n-1})$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+o(1)\right) = \frac{1}{3}$.

Задача 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\sqrt{1}\right)\right)\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)\right) =$

сделаем замену переменной $\frac{1}{x} = t$. Тогда при $x \to \infty$ получим, что $t \to 0$ и

$= \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2}\left(\left(1+\frac{t}{2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)t^2}{2!}+o(t^2)\right)+\left(1-\frac{t}{2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)t^2}{2!}+o(t^2)\right)-2\right)\right) =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2}\left(-\frac{t^2}{8}-\frac{t^2}{8}+o(t^2)\right)\right) = \lim\limits_{t\to 0}\left(-\frac{1}{4}+o(1)\right) = -\frac{1}{4}$.

Задача 7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}-x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\right) =$

сделаем замену переменной $\frac{1}{x} = t$. Тогда при $x \to +\infty$ получим, что $t \to +0$

$= \lim\limits_{t\to+0}\left(\frac{1}{t}\left(\left(1+\frac{1}{6}t+o(t)\right)-\left(1-\frac{1}{6}t+o(t)\right)\right)\right) = \lim\limits_{t\to+0}\left(\frac{1}{3}+o(1)\right) = \frac{1}{3}$.

Задача 7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}+\frac{1}{3!x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x^3\left(1+\frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{2}}\right) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}+x^2-x+\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+o(1)-x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)\right) =$

сделаем замену переменной $\frac{1}{x}=t$. Тогда при $x\to+\infty$ получим, что $t\to+0$

$$=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{3!}+o(1)-\frac{t^3}{2}+o(t^3)\right)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{3!}+o(1)+o(t^2)\right)=\frac{1}{6}\,.$$

Задача 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=$

сделаем замену переменной $\frac{1}{x}=t$. Тогда при $x\to\infty$ получим, что $t\to 0$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right)=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\left(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\right)=$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+o(1)\right)=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)=\frac{1}{2}\,.$$

Задача 9. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)-x}{x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)}{x^2-\frac{x^4}{3!}+o(x^5)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x}{3!}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{3!}+o(x^3)}=0.$$

Правила Лопиталя – Бернулли

Правила Лопиталя используются для раскрытия так называемых неопределённостей типа $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Неопределённость типа $\left[\frac{0}{0}\right]$

Теорема 1. ***Пусть:***

1. ***Функции $f(x), g(x)$ определены в промежутке $(a,b]$.***
2. $\lim\limits_{x+0\to a}f(x)=0,\quad \lim\limits_{x+0\to a}g(x)=0.$
3. ***В промежутке $(a,b]$ существуют конечные производные $f'(x), g'(x)$, причём $g'(x)\neq 0$ во всех точках этого промежутка.***
4. ***Существует (конечный или нет) предел $\lim\limits_{x+0\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$.***

Тогда и $\lim\limits_{x+0\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K$.

Теорема 2. ***Пусть***

1. ***Функции $f(x), g(x)$ определены в промежутке$[c,+\infty)$, где $c>0$.***
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0.$
3. ***В промежутке $[c,+\infty)$ существуют конечные производные $f'(x), g'(x)$, причём $g'(x)\neq 0$ во всех точках этого промежутка.***
4. ***существует (конечный или нет) предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$.***

Тогда и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K$.

Неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теорема 3. ***Пусть:***

1. ***Функции $f(x), g(x)$ определены в промежутке $(a, b]$.***
2. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = +\infty$.
3. ***В промежутке $(a, b]$ существуют конечные производные $f'(x), g'(x)$, причём $g'(x) \neq 0$ во всех точках этого промежутка.***
4. ***Существует (конечный или нет) предел $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$.***

Тогда и $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Теорема 4. ***Пусть***

1. ***Функции $f(x), g(x)$ определены в промежутке $[c, +\infty)$, где $c > 0$.***
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
3. ***В промежутке $[c, +\infty)$ существуют конечные производные $f'(x), g'(x)$, причём $g'(x) \neq 0$ во всех точках этого промежутка.***
4. ***существует (конечный или нет) предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$.***

Тогда и $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Теорема 5 (Штольц). Пусть

1. **Для всех n выполнены неравенства $x_{n+1} > x_n > 0$,**
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$,
3. **существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=K$.**

   Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}=K$.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$. Решение. Это – неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя (теорему 4). Так как $x' = 1, (e^x)' = e^x$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, по теореме 4 имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\gamma}{a^x}, a > 1$. Решение. Если $\gamma \leq 0$, то в этом случае никакой неопределённости нет, этот предел равен 0. Если же $\gamma > 0$, то имеется неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$. Если $\gamma \in \mathbb{N}$, то $(x^\gamma)' = \gamma x^{\gamma-1}, \ldots, (x^\gamma)^{(\gamma-1)} = \quad = \gamma!\, x, (x^\gamma)^{(\gamma)} = \gamma!, (a^x)^{(k)} = a^x(\ln a)^k$. При этом $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\gamma!}{a^x(\ln a)^\gamma} = 0$. По теореме 4, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\gamma! x}{a^x(\ln a)^{\gamma-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\gamma!}{a^x(\ln a)^\gamma} = 0$.

Далее, снова по теореме 4, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\gamma(\gamma-1)\ldots 3x^2}{a^x(\ln a)^{\gamma-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\gamma! x}{a^x(\ln a)^{\gamma-1}}=$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\gamma!}{a^x(\ln a)^{\gamma}}=0,$

и так далее, пока не получим $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\gamma}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\gamma x^{\gamma-1}}{a^x\ln a}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\gamma(\gamma-1)\ldots 3x^2}{a^x(\ln a)^{\gamma-2}}=$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\gamma! x}{a^x(\ln a)^{\gamma-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\gamma!}{a^x(\ln a)^{\gamma}}=0.$

Если $\gamma\notin\mathbb{N}$, то применим правило Лопиталя $[\gamma]+1$ раз (символ $[\gamma]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее γ) и получим тот же результат, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\gamma}{a^x}=0$, если $a>1$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=[0\cdot\infty]$. Решение. Преобразуем этот предел к виду $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Получилась неопределённость типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Применим теорему 3, согласно которой $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to+0}x=0.$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x^x$. Решение. Преобразуем этот предел к виду $\lim\limits_{x\to+0}x^x=[0^0]=\lim\limits_{x\to+0}e^{x\ln x}$. Ввиду непрерывности показательной функции, этот предел равен $\lim\limits_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to+0}x\ln x}=e^0=1$. Здесь был использован предыдущий пример.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x^\alpha(\ln x)^\beta,\alpha>0$. Решение. Посредством замены $t=-\ln x$ задача сводится к вычислению предела $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-\alpha t}t^\beta=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^\beta}{e^{\alpha t}}=0,$ см. пример 2.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$. Решение. Применим теорему Штольца. Её условия выполнены: $\ln(n+1)>\ln n>0, n>2, \lim\limits_{n\to\infty}\ln n=\infty.$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=$
1.

Замечание. Не стоит думать, что правила Лопиталя всегда могут помочь разобраться с неопределенностями подобного вида. Иногда существует предел $\lim\limits_{x+0\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K$, но не существует $\lim\limits_{x+0\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$.

Пример 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1$. Но если мы рассмотрим предел отношения производных числителя и знаменателя этой дроби, то получим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$. А такой предел не существует.

Задача 1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5-1}{2x^3-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\frac{5x^4}{6x^2-1}=\frac{5}{5}=1.$

Задача 2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x^2-1}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{3}$.

Замечание. Не забывайте после применения правила Лопиталя (как, впрочем, и других логических переходов) максимально упрощать полученные выражения.

Задача 3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{(\sin x)^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3(\sin x)^2\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{3\cos x}\right)=\frac{1}{3}$.

Задача 4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{10x^9-10}{5x^4-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{90x^8}{20x^3}=\frac{9}{2}$.

Задача 5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}=[1^\infty]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\ln(\sin x)^{\operatorname{tg}x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\operatorname{tg}x\ln(\sin x)}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg}x}}$. Рассмотрим отдельно $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg}x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{(\sin x)^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\sin x\cos x)=0$. Поэтому $e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg}x}}=e^0=1$.

Задача 6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=[\infty^0]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$. Рассмотрим отдельно $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot2x\right)}{\frac{1}{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$. Поэтому

$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=e^1=e$.

Задача 7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{\frac{1}{\cos3x}(-3\sin3x)}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos3x}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\sin3x}\right)=\frac{1}{9}$.

Задача 8. $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\frac{1}{1+(x-1)^2}}{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x-2}}\cdot(2x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{2\sqrt{x^2+x-2}}{(1+(x-1)^2)\cdot(2x-1)}=\frac{0}{1}=0.$

Задача 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)\ln(x+1)-x}{e^x-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1\cdot\ln(x+1)+(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}-1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{e^x-1}=$

$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{e^x}=\frac{1}{1}=1.$

Задача 10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$

$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$

Задача 11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}=[0^0]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\ln(\pi-2x)^{\cos x}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\ln(\pi-2x)}$. Рассмотрим отдельно $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\ln(\pi-2x)=[0\cdot\infty]=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln(\pi-2x)}{(\cos x)^{-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{\pi-2x}\cdot(-2)}{-1\cdot(\cos x)^{-2}(-\sin x)}=-2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(\cos x)^2}{\sin x\cdot(\pi-2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$=-2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{2\cos x(-\sin x)}{\cos x\cdot(\pi-2x)-2\sin x}=4\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos x}{\operatorname{ctg}x\cdot(\pi-2x)-2}=4\cdot\frac{0}{-2}=0$. Поэтому

$e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\ln(\pi-2x)}=e^0=1.$

Задача 12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}=[\infty^0]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\ln(\operatorname{tg}x)^{\cos x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\cos x\ln\operatorname{tg}x}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\ln\operatorname{tg}x}$. Рассмотрим отдельно $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\cos x\ln\operatorname{tg}x)=[0\cdot\infty]=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{(\cos x)^{-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{(\cos x)^2}}{-(\cos x)^{-2}\cdot(-\sin x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{(\cos x)^2}}{\frac{1}{(\cos x)^2}\cdot\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos x}{(\sin x)^2}=\frac{0}{1}=0$. Поэтому $e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\ln\operatorname{tg}x}=e^0=1.$

Задача 13. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+3^x)^{\frac{1}{x}}=[\infty^0]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln(3x^2+3^x)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(3x^2+3^x)}$.

Рассмотрим отдельно $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(3x^2+3^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x^2+3^x)}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3x^2+3^x}\cdot(6x+3^x\ln 3)}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x+3^x\ln 3}{3x^2+3^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6+3^x(\ln 3)^2}{6x+3^x\ln 3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x(\ln 3)^3}{6+3^x(\ln 3)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln 3)^3}{\frac{6}{3^x}+(\ln 3)^2} = \frac{(\ln 3)^3}{(\ln 3)^2} = \ln 3$. Поэтому $e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln(3x^2+3^x)} = e^{\ln 3} = 3$.