Билет 7. Предельный переход в неравенствах. Вычисление $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

Теорема 7.1. ***Если функция имеет предел при $x \to a$, равный A, и в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a принимает неотрицательные значения, то $A \geq 0$***

Доказательство. Будем доказывать методом от противного. Допустим, что $A< 0$. Возьмем $\delta = \frac{|A|}{2}$. Тогда $\exists\delta > 0\ \forall x: 0 < |x-a| < \delta, |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$, откуда $f(x) < A - A/2 = A/2 < 0$

Получаем, что для любого x из пересечения проколотых окрестностей $\mathring{U}(a)$ и $\mathring{U}_\delta(a)$ одновременно выполняются неравенства $f(x) < 0$ и $f(x) \geq 0$. Тем самым мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 7.2. ***Если для двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеющих пределы, соответственно, A_1 и A_2, в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ выполняется неравенство $f_1(x) < f_2(x)$, то $A_1 \leq A_2$.***

Доказательство. Обозначим $\varphi(x) = f_2(x) - f_1(x)$. При этом $\forall x \in \mathring{U}(a)$ $\varphi(x) > 0$. $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) - \lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_2 - A_1$ По теореме **9.1** имеем $A_2 - A_1 \geq 0$, т.е. $A_1 \leq A_2$. Теорема доказана.

Замечания:

- эти две теоремы означают, что при переходе к пределу сохраняется нестрогое неравенство;
- строгое неравенство между функциями **может не сохраниться для пределов.**

Например, для функций $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = x^2$ в любой $\mathring{U}(0)$ выполняется неравенство $0 < x^2$, т.е. $f_1(x) < f_2(x)$. Однако, $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$

Теорема 7.3. (Теорема о “зажатой” переменной).

Если $\forall x \in \mathring{U}(a)$ выполняется неравенство $f_1(x) < f(x) < f_2(x)$, и если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$, то. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Доказательство. Для доказательства данной теоремы докажем *лемму*:

<u>Лемма 7.1.</u> ***Если*** $\forall \boldsymbol{x} \in \mathring{U}(\boldsymbol{a})$ ***выполняется неравенство*** $\mathbf{0} \le \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$***, и если*** $\lim_{x\to a} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$***, то и*** $\lim_{x\to a} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$**.**

Доказательство. Требуется доказать, что:$\forall \delta > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x: 0 < |x-a| < \delta\ |\varphi(x)| < \varepsilon$. Имеется:$\forall \delta > 0 \exists \delta_0 > 0\ \forall x: 0 < |x-a| < \delta_0 |\phi(x)| < \varepsilon$

Выберем δ таким, что$\mathring{U}_\delta \subset \mathring{U}(a)$, а также удовлетворяющим неравенству $\delta < \delta_0$, из которого следует, что $\mathring{U}_\delta \subset\ \mathring{U}_{\delta_0}(a)$.Тогда $\forall x \in \mathring{U}(a)\ \varphi(x) \ge 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(a)\ 0 \le \varphi(x) \le \phi(x) < \varepsilon$, что означает, что $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы и обозначим $\varphi(x) = (x) - f_1(x), \phi(x) = f_2(x) - f_1(x)$. При этом $\varphi(x), \phi(x)$ удовлетворяют условиям леммы.

Далее, $\lim_{x\to a} \phi(x) = A - A = 0$ и, по лемме, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$. Наконец, $f(x) = \varphi(x) + f_1(x) \to A$ при $x \to a$ (т.к. $\varphi(x) \to 0$, $f_1(x) \to A$ при $x \to a$). Таким образом, теорема доказана.

<u>Определение 7.1.</u> Если $\forall \delta > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x: 0 < x - a < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что существует ***предел функции*** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ***при стремлении*** $\boldsymbol{x}$ ***к*** $\boldsymbol{a}$ ***справа*** и обозначают это так: $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$. Аналогично, если $\forall \delta > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x: -\delta < x - a < 0\ |f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что существует ***предел функции*** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ***при стремлении*** $\boldsymbol{x}$ ***к*** $\boldsymbol{a}$ ***слева*** и обозначают это так: $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$.

<u>Теорема 7.4.</u> ***Функция*** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ***имеет при*** $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ ***предел, равный А, тогда и только тогда, когда он имеет пределы при стремлении*** $\boldsymbol{x}$ ***к*** $\boldsymbol{a}$ ***справа и слева, причем оба эти предела равны А.***

Доказательство. Если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, то $\forall \delta > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x: 0 < |x-a| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$. Поскольку из неравенств $0 < x - a < \delta$ и $-\delta < x - a < 0$следует неравенство $0 < |x-a| < \delta$, $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$.

Обратно, $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $\forall\delta > 0\ \exists\delta_1 > 0\ \forall x: 0 < x - a < \delta_1, |f(x) - A| < \varepsilon$; $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $\forall\delta > 0\ \exists\delta_2\ \forall x: -\delta_2 < x - a < 0, |f(x) - A < \varepsilon$.

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда если $0 < |x - a| < \delta$, то либо $0 < x - a < \delta \le \delta_1$, либо $-\delta_2 \le -\delta < x - a < 0$.

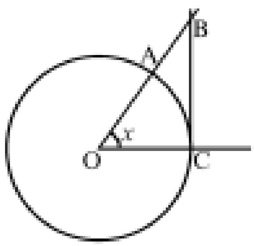
И в том, и в другом случае $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Замечание: разумеется, для пределов справа и слева верны все теоремы об арифметических свойствах предела и о предельном переходе в неравенствах.

<u>Теорема 7.5. (первый замечательный предел)</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Замечание: при доказательстве этой теоремы нельзя применять правило Лопиталя, т.к. хотя это и даст верный результат, но будет являться логической ошибкой, потому что при вычислении производной функции $sinx$ используется, что $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$



Доказательство. Функция $\frac{\sin x}{x}$ четная. Поэтому если доказать, что $\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = 1$, то и $\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = 1$. И по теореме **7.4**. тогда $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. В определении предела при $x \to +0$ можно дополнительно требовать выполнение условия $\delta < 0$. В определении требуется существование хотя бы какого-нибудь $\delta > 0$. Если же мы найдем $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, то, тем самым, хотя бы какое-нибудь $\delta > 0$ будет найдено. Итак, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность единичного радиуса и площади треугольников OAC, OBC и сектора OAC.

$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}\sin x, S_{OAC\text{ сект}} = \frac{1}{2}x, S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}tg\ x, S_{\Delta OAC} < S_{OAC\text{ сект}} < S_{\Delta OBC}$, откуда $\sin x < x < tg\ x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, что равносильно $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. Далее, $\cos x = 1 - 2sin^2\frac{x}{2}$, а для $sin\frac{x}{2}$ мы только что доказали, что $0 < sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{2}$, поэтому по теореме **7.3.** $\lim\limits_{x\to+0} sin\frac{x}{2} = 0$ и, значит, $\lim\limits_{x\to+0}\cos x = \lim\limits_{x\to+0} 1 - 2sin^2\frac{x}{2} = 1 - 0 = 1$. Снова применяем теорему **7.3**, откуда $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$ и, значит, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.