<u>Билет 13. Символы $\bar{\bar{o}}$, $\underline{\underline{O}}$. Вычисление</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}$

Пусть $f(x)$, $g(x)$ определены в $\mathring{U}(a)$

<u>Определение 13.1.</u> $f(x) = \bar{\bar{o}}\big(g(x)\big), x \to a$, если существует $\alpha(x)$, $\alpha(x)$– б. м. при $x \to a$ такая, что $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$.

<u>Определение 13.2</u>. $f(x) = \underline{\underline{O}}\big(g(x)\big)$, $x \to a$, если существует $\beta(x)$, – ограниченная в $\mathring{U}(a)$, такая, что $f(x) = \beta(x) \cdot g(x)$.

1) $x^2 = \bar{\bar{o}}(x)$ при $x \to a$, т.к. $x^2 = x \cdot x$, а $x \to 0$; <u>но</u>

2) $x = \bar{\bar{o}}(x^2)$, при $x \to \infty$ ∞, т.к. $x = x^2 \cdot \frac{1}{x}$, и $\frac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$.

Вообще, если $m > n$ и $x \to 0$, то $x^m = \bar{\bar{o}}(x^n)$ и если $m > n$ и $x \to \infty$ то $x^m = \bar{\bar{o}}\,(x^n)$.

Из свойств бесконечно малых величин следуют такие свойства символов $\bar{\bar{o}}$, $\underline{\underline{O}}$:

<u>Теорема 13.1.</u> ***Если*** $\boldsymbol{f_1(x) = \bar{\bar{o}}(g(x))}$, $\boldsymbol{f_2(x) = \bar{\bar{o}}(g(x))}$, ***то,*** $\boldsymbol{f_1(x)+f_2(x) = \bar{\bar{o}}\big(g(x)\big)}$, $\boldsymbol{f_1(x) \cdot f_2(x) = \bar{\bar{o}}\left(g^2(x)\right)}$***; все соотношения выписаны при*** $\boldsymbol{x \to a}$***.***

Доказательство. Действительно, $f_1(x) = \alpha_1(x) \cdot g(x)$,
$f_2(x) = \alpha_2(x) \cdot g(x)$, $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – б.м. при $x \to a$ и $f_1(x) + f_2(x) =$ $\{\alpha_1(x) + \alpha_2(x)\} \cdot g(x)$, а $f_1(x) \cdot f_2(x) = \{\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)\} \cdot g^2(x)$. В фигурных скобках стоят бесконечно малые при $x \to a$.

<u>Теорема 13.2.</u> $\boldsymbol{\bar{\bar{o}}\,(\bar{\bar{o}}(g(x))) = \bar{\bar{o}}(g(x))}$***, т.е. если*** $\boldsymbol{f(x) = \bar{\bar{o}}\,(\bar{\bar{o}}(g(x)))}$***, то*** $\boldsymbol{f(x) = \bar{\bar{o}}(g(x))}$ ***при*** $\boldsymbol{x \to a}$***.***

Доказательство. Действительно, если $f(x) = \bar{\bar{o}}(\varphi(x))$, а $\varphi(x) = \bar{\bar{o}}(g(x))$, т. е. $f(x) = \alpha_1(x) \cdot \varphi(x)$, $\varphi(x) = \alpha_2(x) \cdot g(x)$, где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, – б. м. при $x \to a$, то $f(x) = \alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x) \cdot g(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, где $\alpha(x)$ – б. м. при $x \to a$, что и означает справедливость доказываемого равенства . Для большей ясности повторим, что равенство следует понимать так: если $f(x) = \bar{\bar{o}}\,(\bar{\bar{o}}(g(x)))$, то $f(x) = \bar{\bar{o}}\big(g(x)\big)$ при $x \to a$.

Теорема 13.3. $\underline{\underline{O}}(\bar{\bar{o}}(g(x))) = \bar{\bar{o}}\,(g(x)), \bar{\bar{o}}\,(\underline{\underline{O}}(g(x))) = \bar{\bar{o}}\,(g(x)), x \to a.$

Доказательство. Эти свойства сразу следуют из того, что произведение бесконечно малой величины на ограниченную есть бесконечно малая величина.

Символы $\bar{\bar{o}}, \underline{\underline{O}}$ удобны при вычислении пределов.

Перейдём к вычислению пределов $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}$, которые далее будут использованы при вычислении производных. Вновь подчеркнём, что при ответе на этот билет при их вычислении нельзя пользоваться правилами Лопиталя или формулой Тейлора. Разумеется, они дадут верный ответ, но их применение требует знания производных функций, стоящих в числителях этих дробей. А для вычисления этих производных, как отмечено выше, требуется знать эти самые пределы. Поэтому получится не доказательство, а порочный логический круг.

Теорема 13.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = 1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = lna, \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu.$

Доказательство.

1. В теореме 9.2 мы установили, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Рассмотрим левую часть этого равенства и преобразуем её так: $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}ln(1+x)}$. По непрерывности показательной функции (а именно: непрерывность функции означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x) = f(x_0)$ получаем $e^{\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}ln(1+x)}} = e$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = 1$

2. Далее рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, и сделаем в нём замену переменной $x = \ln(1+t)$ (это – монотонная замена и теорема о пределе сложной функции будет верна). При $x \to 0$ и $t \to 0$, и наоборот, при $t \to 0$ также $x \to 0$.

Поэтому $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{ln(1+t)}-1}{ln(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1+t-1}{ln(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{ln(1+t)} = 1$, по доказанному выше.

Для $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ имеем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{xlna}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{xlna}-1)lna}{xlna}=lna,$

3. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}$. Обозначим $(1+x)^{\mu}-1=y$, т. е. $(1+x)^{\mu}=y+1$. Тогда $ln(1+x)^{\mu}=\ln(y+1)$, $\mu\ln(1+x)=\ln(y+1)$ и при $x\to 0$ переменная $y\to 0$, и наоборот, при $y\to 0$ переменная $x\to 0$. Наш предел примет вид $\lim\limits_{x,y\to 0}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x,y\to 0}\frac{y}{x}\cdot\frac{ln(1+y)}{ln(1+y)},$ Это преобразование законное, т. к. при $x\neq 0$ и $y\neq 0$, поэтому $\ln(1+y)\neq 0$. Далее используем доказанное в первом пункте равенство. Таким образом, искомый предел равен $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mu ln(1+x)}{x}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{ln(1+y)}=\mu.$

Запишем найденные предельные соотношения с помощью символа $\bar{\bar{o}}$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$ означает, что $\frac{ln(1+x)}{x}=1+\alpha(\mathrm{x})$, $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$ или, $\ln(1+x)=x+\alpha(x)\cdot x=x+\bar{\bar{o}}(\mathrm{x})$, $x\to 0$.

Равенство $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=lna,$ означает, что $a^x=1+xlna+\bar{\bar{o}}(x), x\to 0.$

Аналогично, $(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\bar{\bar{o}}(x)$, $x\to 0$.

(Кстати, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$ означает, что $sinx=x+\bar{\bar{o}}(x)$ при $x\to 0$).