Билет 16. Равномерная непрерывность.

Определение 16.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$. Функция $y = f(x)$называется ***равномерно непрерывной*** на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ и $a \in X$ удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Замечание: есть важное различие между понятиями равномерной непрерывности на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и непрерывности на этом множестве. Из равномерной непрерывности следует непрерывность, но не наоборот. В определении равномерной непрерывности содержится сильное требование о том, чтобы входящее в определение число $\delta > 0$ зависело только от числа $\varepsilon > 0$. В обычном определении непрерывности на множестве (определение 16.1) это число $\delta > 0$ зависит не только от числа $\varepsilon > 0$, но ещё и от точки $a \in X$. Поэтому возможно, что общего значения числа $\delta > 0$, одновременно пригодного для всех $a \in X$, найти не удастся. Однако если в качестве множества $X \subset \mathbb{R}$ рассматривается отрезок числовой оси, то верна такая теорема.

Теорема 16.1 (Кантор)

Пусть функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ непрерывна на отрезке $\boldsymbol{[a, b]}$. Тогда она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Будем вести доказательство теоремы методом «от противного». Отсутствие равномерной непрерывности означает, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого числа $\delta > 0$ существуют точки $c \in [a, b]$, $x \in [a, b]$, для которых выполнены неравенства $|x - c| < \delta$ и $|f(x) - f(c)| \geq \varepsilon$. Зафиксируем это число $\varepsilon > 0$ и будем последовательно выбирать число $\delta > 0$ равным числам $1, {}^1/_2, \dots, {}^1/_n, \dots$. При каждом таком выборе числа $\delta > 0$ существуют точки $c_1, x_1, c_2, x_2, \dots, c_n, x_n, \dots$ такие, что для всех $n = 1,2, \dots$ выполнены неравенства $|x_n - c_n| < {}^1/_n$ и $|f(x_n) - f(c_n)| \geq \varepsilon$. Последовательность точек (c_n) - бесконечная и ограниченная. Поэтому, по теореме Больцано-Вейерштрасса, существует подпоследовательность (c_{n_k}), имеющая предел, который будем обозначать d. Далее, из неравенства $|x_n - c_n| < 1/n$ при $n = n_k$ получаем $|x_{n_k} - c_{n_k}| < 1/n_k < 1/k$, т.е. $c_{n_k} - 1/k < x_{n_k} < c_{n_k} + 1/k$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} c_n = d$, $\lim\limits_{k\to\infty} 1/k = 0$, правая и левая части этих неравенств имеют одинаковые пределы, равные числу d. По теореме 9.3 из этого следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = d$. Так как $a \le c_{n_k} \le b$, по теореме о предельном переходе в неравенствах получаем: $a \le d \le b$, т.е. $d \in [a, b]$ и, следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в этой точке. По выбору точек x_{n_k}, c_{n_k} выполнено неравенство $\left|f(x_{n_k}) - f(c_{n_k})\right| \ge \varepsilon$. Перейдём в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$. Ввиду непрерывности модуля и непрерывности функции $y = f(x)$, получаем $\varepsilon \le \lim\limits_{k\to\infty}\left|f(x_{n_k}) - f(c_{n_k})\right| = \left|\lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k}) - f(c_{n_k}))\right| = \left|f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) - f(\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k})\right| = |f(d) - f(d)| = 0$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание: Функция, непрерывная на интервале (a, b), не обязательно равномерно непрерывна на нём. Пример: функция $y = 1/x$, непрерывная на интервале $(0,1)$, не равномерно непрерывна на этом интервале. Для доказательства выберем $\varepsilon = 1$ и для любого $0 < \delta < 1$ рассмотрим точки $x = \delta/2$, $c = \delta/4$. При этом $|x - c| = \delta/4 < \delta$, но $\left|2/\delta - 4/\delta\right| = 2/\delta > 2 > \varepsilon$.