Билет 17. Производная, её естественнонаучный смысл и основные свойства.

17.1. Дифференцируемость функции.

Пусть $y = f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0.

Определение 17.1. Числовую функцию f называют ***дифференцируемой*** в точке x_0, если для всех $x \in U(x_0)$ имеет место равенство

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \tag{1}$$

где число k не зависит от x, а $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$ и бесконечно малая функция $\alpha(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. $\alpha(x_0) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)$.

Числовую функцию f называют ***дифференцируемой*** на множестве X, если f дифференцируема в каждой точке $x_0 \in X$.

Пример 1. ***Линейная*** функция $f(x) = kx + b$ дифференцируема на всей числовой прямой

Действительно, $kx + b = kx_0 + b + k(x - x_0) + 0 \cdot (x - x_0)$, $(k = k, \alpha(x) = 0)$. В частности, ***постоянные*** $(k = 0)$ и ***тождественная*** функция $(k = 1, b = 0)$ дифференцируемы.

Пример 2. Квадратичная функция $f(x) = x^2$ дифференцируема.

Действительно, $x^2 = (x_0 + (x - x_0))^2 = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)(x - x_0)$, $k = 2x_0, \alpha(x) = x - x_0$.

Теорема 17.1. ***Функция f, дифференцируемая в точке x_0, непрерывна в этой точке.***

Доказательство. В силу формулы (1), $f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Пример функции $|x|$ (чуть позже мы докажем, что эта функция не дифференцируема в точке $x = 0$), показывает, что утверждение, обратное теореме 1, неверно.

17.2. Производная.

Пусть $y = f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0.Поскольку на множестве $\mathring{U}(x_0)$ определена функция $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ и x_0 - предельная точка для $\mathring{U}(x_0)$, то можно ставить вопрос о существовании предела ***разностного отношения*** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ в точке x_0.

Определение 17.2. Число $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (если оно существует) называют ***производной функции*** f в точке x_0 и обозначают символом $f'(x_0)$.

Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{2}$$

при условии, что предел существует.

Для обозначения производной также используется символ $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Например, скорость прямолинейного движения есть производная перемещения как функции времени. Часто полезно, по аналогии с этим, трактовать и *производную любой функции f в точке* x_0 как скорость изменения функции в этой точке. Пример- скорость химической реакции.

Пример 1'. Линейная функция $f(x) = kx + b$ имеет производную в каждой точке, и ее производная $(kx + b)' = k$ - постоянная.

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(kx+b)-(kx_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} k = k.$$

В частности, ***постоянная имеет всюду производную, равную нулю, а тождественная функция - производную, равную единице.***

Пример 2'. Квадратичная функция $f(x) = x^2$ имеет производную в каждой точке, и ее производная равна $(x^2)' = 2x$.

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0.$$

Пример 3'. Модуль $|x|$ не имеет производной в точке 0.

Действительно, $\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}$ не существует, поскольку предел при $x \to +0$ этого отношения равен 1, а предел при $x \to -0$ равен -1 и, следовательно, предел при $x \to 0$ не существует

В этом примере мы встретились с ситуацией, когда существуют $\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ и $\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Эти величины называются, соответственно, ***правой и левой производной*** и обозначаются $f'_{\text{пр}}(x_0), f'_{\text{лев}}(x_0)$. Для существования производной, по теореме 9.4, необходимо и достаточно, чтобы $f'_{\text{пр}}(x_0), f'_{\text{лев}}(x_0)$ существовали и были равны друг другу.

Теорема 17.2. ***Функция f, дифференцируемая в точке x_0, имеет в этой точке производную, и последняя равна коэффициенту k в представлении функции f по формуле (1).***

Согласно определению 1, x_0 - предельная точка области определения функции $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. В силу формулы (1), $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = k + \alpha(x)$ для всех $x \in \mathring{U}(x_0)$,.Так как $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то на основании формулы (2) заключаем, что $f'(x_0)$ существует и равна k.

Из единственности предела следует единственность коэффициента k в формуле (1). Теорема 17.2 показывает, что функция f, дифференцируемая в точке x_0, представима в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0) + \alpha(x) * (x - x_0), \qquad (3)$$

$\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

На основании теоремы 17.2 утверждения примеров 1' - 2' являются следствиями соответствующих утверждений примеров 1-2. Вместе с тем, пример 3’ показывает, что функция $|x|$ не является дифференцируемой в точке 0.

Теорема 17.3. ***Функция f, имеющая производную в точке x_0, дифференцируема в этой точке.***

По условию, существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. Следовательно, по теореме о представлении функции, имеющей предел в точке,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\alpha_0(x), \tag{4}$$

где и $\alpha_0(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Положим

$$\alpha(x)=\begin{cases}\alpha_0(x) \text{ для всех } x\in \mathring{U}(x_0)\\ 0 \text{ при } x=x_0\end{cases}$$

Тогда также $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$ и по формуле (4') для всех $x\in \mathring{U}(x_0)$ справедлива формула (3). Тем самым, f дифференцируема в точке x_0 (с коэффициентом $k=f'(x_0)$).

Таким образом, сказать, что числовая функция дифференцируема в данной точке, или что она имеет в этой точке производную, одно и то же. Нахождение производной функции f' у функции f называют ***дифференцированием*** этой функции.

17.3. <u>Правила дифференцирования</u>

Дифференцирование линейной комбинации, произведения и частного.

<u>**Теорема 17.4**</u> ***Пусть f имеет производную в точке x. Тогда для любой постоянной c справедлива формула:***

$$(\boldsymbol{cf})'=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{f}'$$

(постоянный множитель можно вынести за знак производной).

Приращение функции $cf(x)$ в точке x равно $cf(x+\Delta x)-cf(x)=c(f(x+\Delta x)-f(x))$. Поскольку существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, существует и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} c\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=c\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=cf'(x)$, что и требовалось доказать.

<u>**Теорема 17.5.**</u> ***Пусть f и g имеют производные в точке x. Тогда существует производная суммы этих функций, причём $\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)'=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$.***

Приращение функции $f(x)+g(x)$ в точке x равно $\big(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)\big)-\big(f(x)+g(x)\big)=\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)+(g(x+\Delta x)-g(x))$, поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)\big)-\big(f(x)+g(x)\big)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$
$$=f'(x)+g'(x)$$

Напомним, что линейной комбинацией функций $f_1,\dots,f_n$ называют всякую функцию f, представимую в виде $f=\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot f_k$, где коэффициенты c_k - постоянные. Областью ее определения служит пересечение областей определения функций f_k. Из теорем 17.4 и 17.5 следует

Теорема 17.6. (Линейное свойство операции дифференцирования).

Если функции $\boldsymbol{f_1,\dots,f_n}$ дифференцируемы в точке $\boldsymbol{x}$, то всякая линейная комбинация $\boldsymbol{f=\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot f_k}$ этих функций дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}$, причем

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot f_k\Big)'=\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot f'_k(x).$$

Теорема 17.7 ***Если функции $\boldsymbol{f_1}$ и $\boldsymbol{f_2}$ дифференцируемы в точке $\boldsymbol{x}$, то их произведение $\boldsymbol{f_1f_2}$ дифференцируемо в точке $\boldsymbol{x}$, причем***

$$\big(f_1(x)f_2(x)\big)'=f'_1(x)f_2(x)+f_1(x)f'_2(x)$$

Приращение произведения f_1f_2 равно $\frac{f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x)-f_1(x)f_2(x)}{\Delta x}=\frac{f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x)-f_1(x)f_2(x+\Delta x)}{\Delta x}+\frac{f_1(x)f_2(x+\Delta x)-f_1(x)f_2(x)}{\Delta x}=\frac{(f_1(x+\Delta x)-f_1(x))f_2(x+\Delta x)}{\Delta x}+f_1(x)$

При $\Delta x\to 0$ выполняются соотношения $\frac{(f_1(x+\Delta x)-f_1(x))}{\Delta x}\to f'_1(x)$, $\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}\to f'_2(x), f_2(x+\Delta x)\to f_2(x)$

Откуда получаем утверждение теоремы.

Теорема 17.8. ***Если функции $\boldsymbol{f_1}$ и $\boldsymbol{f_2}$ дифференцируемы в точке $\boldsymbol{x}$, и $\boldsymbol{f_2(x) \neq 0}$ то их частное $\boldsymbol{f_1(x)/f_2(x)}$ дифференцируемо в точке $\boldsymbol{x}$, причем***

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f'_1(x)f_2(x) - f'_2(x)f_1(x)}{f'_2(x) * f'_2(x)}.$$

Сначала докажем лемму

Лемма 17.1. ***Если функция $\boldsymbol{f_2}$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}$, и $\boldsymbol{f_2(x) \neq 0}$ то функция $\boldsymbol{1/f_2(x)}$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}$, причем***

$$\left(\frac{1}{f_2(x)}\right)' = \frac{-f'_2(x)}{f_2^2(x)}.$$

Приращение имеет вид:

$$\frac{1}{f_2(x+\Delta x)} - \frac{1}{f_2(x)} = -\frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{f_2(x+\Delta x) f_2(x)}$$

По лемме **6.1** функция $1/f_2(x+\Delta x)$ определена и ограничена в окрестности точки x. Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{f_2(x+\Delta x)} - \frac{1}{f_2(x)}\right) = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{f_2(x+\Delta x) f_2(x)} = -\frac{-f'_2(x)}{f_2^2(x)}.$$

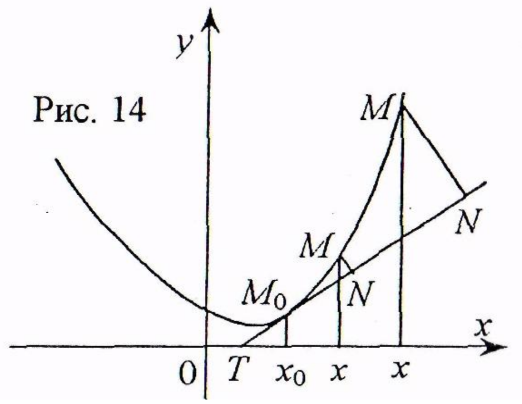
Теорема 17.8 сразу следует из теоремы **17.7** и леммы **17.1.**

17.4. Касательная к графику функции.

Как и нахождение скорости неравномерного движения, нахождение касательной к кривой линии - одна из основных задач, решение которых привело к созданию дифференциального исчисления.

Рассмотрим частный случай задачи о касательной, когда линией служит график функции.

<u>Определение 17.3.</u> Пусть числовая функция f определена на невырожденном промежутке I и непрерывна в его точке x_0 (так что расстояние MM_0 от соответствующей точки $M_0(x_0; f(x_0))$ графика до его точки $M(x; f(x))$, $x \in I$, стремится к нулю при $x \to x_0$). ***Касательной*** к графику функции f в точке M_0 называют такую прямую, проходящую через M_0, что отношение расстояния MN от точки $M(x; f(x))$, до этой прямой к расстоянию MM_0 от M_0 до M стремится к нулю при $x \to x_0$ (т.е. что MN бесконечно мало по сравнению с MM_0 при $x \to x_0$).



Суть этого определения можно наглядно описать следующим образом: если представить, что точка M движется по линии к точке касания M_0 , то, какова бы ни была точность наблюдения, с некоторого момента точка M, будучи еще отличной от M_0 , уже неотличима от своей проекции N на касательную (рис. 14). Таким образом, кривая, обладающая в точке M_0 касательной, почти сливается с ней вблизи этой точки.

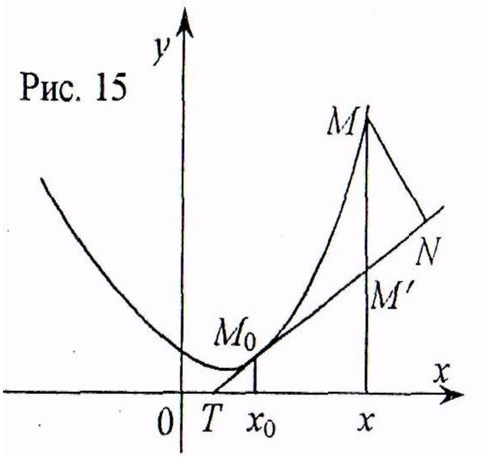
<u>Теорема 17.9.</u> ***Если функция $\boldsymbol{f}$, определенная на промежутке, дифференцируема в его точке $\boldsymbol{x_0}$, то график этой функции имеет в соответствующей точке $\boldsymbol{M_0(x_0; f(x_0))}$ касательную, причем угловой коэффициент касательной равен $\boldsymbol{f'(x_0)}$.***

По условию и по теореме 19.2 предыдущего пункта, представление

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \alpha(x) \cdot (x - x_0)$, (5) справедливо для всех x, принадлежащих некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, и $\alpha_0(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Прямая с угловым коэффициентом $f'(x_0)$, проходящая через точку M_0 , имеет уравнение $y = f(x_0) + f'(x) \cdot (x - x_0)$. (6)

Пусть M - точка графика с абсциссой $x \neq x_0$ и $x \in U(x_0)$ (рис. 15), N - проекция этой точки на прямую (6) и M' - точка этой прямой с абсциссой x. Тогда направленный отрезок $M'M$ равен $f(x) - y$, так что, вычитая (6) из (5), получаем $M'M = \alpha(x) \cdot (x - x_0)$. Так как $MN \leq M'M$, а $M_0M \geq |x - x_0|$, то

$\frac{MN}{MM_0} \leq \frac{|M\prime M|}{|x-x_0|}$. Но $\frac{|M\prime M|}{|x-x_0|} = |\alpha(x)| \to 0$ при $x \to x_0$. Следовательно, $\frac{MN}{MM_0} \to 0$ при $x \to x_0$, т.е. (6) - уравнение касательной к графику функции f в его точке M_0.



Таким образом, нахождение углового коэффициента касательной (как и нахождение скорости) приводит к вычислению производной.

Замечание: Секущая MM_0 имеет угловой коэффициент $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (см. рис. 15). Таким образом теорема 1 показывает, что ***угловой коэффициент касательной в точке M_0 есть предел углового коэффициента секущей MM_0 при $x \to x_0$.***