Билет 19. Дифференциал. Инвариантность формы первого дифференциала

Понятие дифференциала числовой функции

Определение 19.1. Если числовая функция f дифференцируема в точке x, то ее ***дифференциалом*** $df(x)$ в этой точке называют однородную линейную функцию $f'(x)h$ (новой) независимой переменной h.

Таким образом,

$$df(x) = f'(x)h \quad (1)$$

Положив в формуле (1) $f(x) = x$, получим

$$dx = 1 \cdot h = h, h \in \mathbb{R} \quad (2)$$

так что дифференциал dx функции $f(x) = x$ в каждой точке xесть

тождественная функция. Подставляя (2) в правую часть (1), получаем

$$df(x) = f'(x)\,dx, \qquad (3)$$

равенство двух линейных функций $df(x)$ и $f'(x)\,dx$. Из него следует, что часто используемое обозначение производной $\frac{df}{dx}$ можно рассматривать, как отношение дифференциалов $df(x)$ и dx.

Функция $df(x)$ определена для всех действительных значений h. Однако по традиции часто рассматривают $df(x)$ лишь на множестве тех h, для которых $x + h$ принадлежит области определения функции; т.е., лишь на множестве приращений аргумента x функции f. Это объясняется тем, что дифференциал тесно связан с приращением функции. Так как, по предположению, f дифференцируема в точке x, то

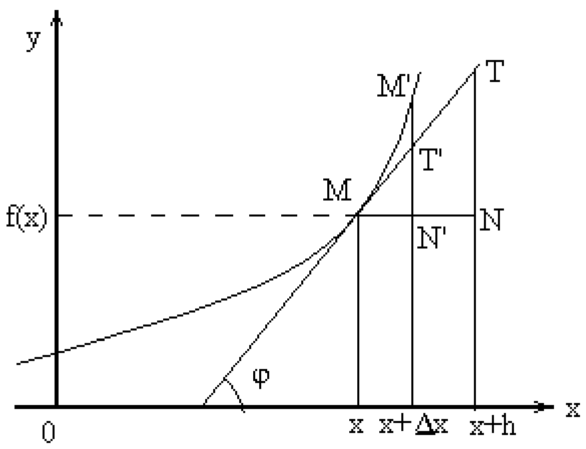
$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \qquad (4)$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и первое слагаемое в правой части (4) – дифференциал, но рассматриваемый только для $h = \Delta x$. Если $f'(x) \neq 0$, то $\alpha(\Delta x)\Delta x = \bar{\bar{o}}(f'(x)\Delta x), \Delta x \to 0$, поэтому говорят, что «дифференциал есть главная линейная часть приращения функции».

Геометрический и механический смысл дифференциала.

Пусть числовая функция f дифференцируема в точке x. Как известно, ее график имеет в точке $M\big(x, f(x)\big)$ **касательную** с угловым коэффициентом $f'(x)$.

Теорема 19.1. ***Значение $df(x) = f'(x)h$ дифференциала равно приращению ординаты этой касательной при переходе от x к $x + h$ (см. рис.).***



Доказательство. Действительно, $tg\,\varphi = f'(x), MN = h$, поэтому $NT = MNtg\varphi = f'(x)h$. Из рисунка также видно, что $f'(x)\Delta x = N'T'$ есть часть приращения $f(x + \Delta x) - f(x) = N'M'$ функции, стремящееся к совпадению с ним при $\Delta x \to 0$.

Дифференциал допускает и **механическое** толкование. Если x – время, а $f(x)$– путь, пройденный прямолинейно движущейся точкой к моменту x, то $f'(x)$ - ее скорость в данный момент. Тогда $f'(x)h$ равен длине пути, который прошла бы точка за промежуток времени от x до $x + h$, если бы ее скорость оставалась неизменной (т.е. приложенные силы уравновесились).

Инвариантность формы первого дифференциала

Правило дифференцирования сложной функции приведет нас к одному замечательному и важному свойству дифференциала.

Пусть функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ таковы, что из них может быть составлена сложная функция: $y = f(\varphi(t))$. Если существуют производные y'_x и x'_t, то по теореме 20.2 существует и производная

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t \qquad (5)$$

Дифференциал dy, если x считать независимой переменной, выразится по формуле (3). Перейдём теперь к независимой переменной t; в этом предположении имеем другое выражение для дифференциала:

$$dy = y'_t \cdot dt.$$

Заменяя производную y'_t её выражением (5) и замечая, что $x'_t \cdot dt$ есть дифференциал x как функции от t, окончательно получим:

$$dy = y'_x \cdot x'_t\, dt = y'_x \cdot dx,$$

т. е. вернёмся к прежней форме дифференциала.

Таким образом, мы видим, что форма дифференциала может быть сохранена даже в том случае, если прежняя независимая переменная заменена новой.

Мы всегда имеем право писать дифференциал y как в форме (1), будет ли x независимой переменной или нет; разница лишь в том, что, если за независимую переменную выбрано t, то dx означает не произвольное приращение Δx, а дифференциал x как функции от t. Это свойство и называют ***инвариантностью формы дифференциала***.

Дифференциал суммы, произведения и частного функций.

В силу равенства (1) из любой формулы для производной в точке x при умножении на dx получается соответствующая формула для дифференциала. В частности, в точках, где функции $u,\ v$ удовлетворяют условиям теорем о дифференцируемости суммы, произведения или частного получаем: $d(u+v) = du + dv$

аналогично, $d(uv) = v\,du + u\,dv$, $d(u\ /\ v) = (v\,du - u\,dv)\ /\ v^2$.

Отметим, что если C – постоянная, то $dC = 0$, $dCu = C\,du$.