Математический анализ

Третий семестр

Числовые ряды. Дифференциальные уравнения

Пособие для подготовки к экзамену для студентов общего потока

Лектор — профессор В.Г.Чирский

Декабрь 2023 г.

Содержание

1 Билет 1. Числовые ряды

1.1 Понятие числового ряда

Пусть $\{a_n\}$ – произвольная числовая последовательность. Складывая один за другим ее члены, получаем последовательность сумм $s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \ \dots,$ $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$ Каждая из них, начиная со второй, получается из предыдущей прибавлением одного слагаемого – члена заданной последовательности $\{a_n\}$, имеющего тот же номер: $s_n = s_{n-1} + a_n$ для всех $n > 1$. Поэтому процесс образования этих сумм можно представить в виде «бесконечно развертывающейся суммы» $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \cdots$. Это не алгебраическая сумма (в алгебре определены лишь суммы конечного числа слагаемых), а запись процесса образования последовательности сумм (s_n).

Формальное выражение

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \cdots \tag{1.1}$$

порождаемое числовой последовательностью a_n, называют *числовым рядом*; числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – его членами: первым, вторым, ..., a_n – n–ным или *общим членом ряда*; $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ – *частными (или частичными) суммами ряда*. Для ряда (1.1) используется и обозначение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Иногда нумерацию членов ряда начинают не с 1, а с 0. Тогда соответствующий ряд обозначается $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. При изучении ряда (1.1) часто приходится рассматривать формальные выражения вида $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots$, которые в дальнейшем будут называться остатками ряда. Остатки ряда сами являются числовыми рядами. Они обозначаются следующим образом: $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

Определим (пока тоже формально) сумму рядов и умножение ряда на число. Пусть даны ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. *Суммой* этих рядов назовем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. *Произведением* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на число λ назовем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$.

1.2 Сходящиеся и расходящиеся ряды

Определение 1.1. *Если последовательность* (s_n) *частных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится к некоторому числу* s*, то этот ряд называют* ***сходящимся*** *к сумме* s *и пишут* $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *или* $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$.

При этом допускается определенная вольность в обозначениях, состоящая в том, что одним и тем же символом $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ обозначаются как сам ряд, так и его сумма.

Несходящиеся ряды называют *расходящимися.*

Замечание. Число s не следует называть «суммой всех членов ряда», так как существует класс рядов, сумма которых зависит от порядка нумерации «слагаемых». Заметим еще раз: s - это предел частных сумм ряда, $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, если этот предел существует.

Сформулируем и докажем важное для дальнейшего утверждение.

Утверждение. Если сходится ряд (1.1)**, то для любого** k **сходится остаток ряда** $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$**. Обратно, если хотя бы для одного значения** k **сходится остаток ряда** $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$**, то сходится и сам ряд** (1.1)**.**

Доказательство. Пусть сходится ряд (1.1). При любом k рассмотрим частную сумму $s_n^* = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n}$. Справедливо равенство

$$s_n^* = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n} = s_{k+n} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = s_{k+n} - s_k \qquad (1.2)$$

При любом фиксированном k последовательность (s_{k+n}) имеет тот же предел, что и последовательность (s_n), число s_k не зависит от n, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} s_k = s_k$. Использовав теорему о пределе разности, получаем, что существует предел последовательности частных сумм s_n^*, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть теперь для некоторого значения k сходится остаток ряда $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Это означает, что последовательность $(s_{k+n} - s_k)$ имеет предел. Используем теорему о пределе суммы, из которой следует, что существует предел последовательности (s_{k+n}). Следовательно, как отмечалось выше, существует предел последовательности (s_n). $\square$

Следствие. Утверждение означает, что либо все остатки ряда сходятся, либо все они расходятся.

Замечание. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму s, то любая его частная сумма s_n есть некоторое приближенное значение s, а соответствующий остаток ряда представляет собой погрешность вычисления.

Докажем необходимое условие сходимости числового ряда.

Теорема 1.1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Пусть сходится ряд (1.1), s – его сумма. Так как при всех $n > 1$ выполняется равенство $a_n = s_n - s_{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} =$ $= s - s = 0$, что и утверждалось. $\square$

Обратное утверждение не является верным: из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не следует, что ряд (1.1) сходится.

Пример. Члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ монотонно стремятся к нулю, так как $0 < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

С другой стороны, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1} - 1$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, что означает, что рассматриваемый ряд расходится.

Теорема 1.2. Пусть сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и их суммы равны s, t соответственно. Тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ и его сумма равна $s + t$. Кроме того, для любого числа c ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ сходится и его сумма равна cs.

Доказательство. Пусть s_n, t_n – частные суммы, соответственно, рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Последовательности $(s_n), (t_n)$ по условию имеют пределы, которые равны суммам рядов s, t. Применяя теорему о пределе суммы последовательностей, получаем, что последовательность $(s_n + t_n)$, представляющая собой последовательность частных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, имеет предел, равный $s + t$. Аналогично, последовательность (cs_n) частных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ имеет предел cs. □

Теорема 1.3. Пусть сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда ряд $\sum\limits_{N=1}^{\infty} b_N$, члены которого образованы в результате последовательной группировки членов исходного ряда, т.е.

$$b_N = a_{n_{N-1}+1} + \cdots + a_{n_N}, \quad N = 1, 2, \ldots, \quad 1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_{N-1} < n_N < \cdots$$

сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство. Рассмотрим последовательность (s_N^*) частных сумм ряда $\sum\limits_{N=1}^{\infty} b_N$. Ее члены имеют вид

$$s_N^* = b_1 + \cdots + b_N = (a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{N-1}+1} + \cdots + a_{n_N}) =$$

$$= a_1 + \cdots + a_{n_N} = s_{n_N}$$

и, следовательно, она является подпоследовательностью последовательности частных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Вспомним теперь, что если последовательность имеет предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел. □

Теорема 1.4 (критерий Коши сходимости ряда). **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится тогда и только тогда, когда для любого** $\varepsilon > 0$ **существует число** $N(\varepsilon)$ **такое, что для любого номера** $n > N(\varepsilon)$ **и любого натурального** p **выполняется неравенство** $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ **или равносильное неравенство** $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$

Доказательство. Вспомним критерий Коши существования предела последовательности частных сумм (s_n): предел этой последовательности существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon)$ такое, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ и любого натурального p выполняется неравенство $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. □

1.3 Бесконечная геометрическая прогрессия

Таким термином принято называть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$. Рассмотрим частные суммы $s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$ этого ряда, рассмотрим также величину $s_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^n$ и разность этих двух величин:

$$s_n - s_n q = (a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}) - (aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n) = a - aq^n$$

При $q \neq 1$ получаем: $s_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$. При $q = 1$, очевидно, $s_n = na$.

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right) = \dfrac{a}{1-q}$, т.е. ряд сходится к сумме $s = \dfrac{a}{1-q}$. Если $|q| \geq 1$, то этот ряд расходится, поскольку не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

2 Билет 2. Сходимость положительных рядов

2.1 Критерий сходимости положительного ряда

Определение 2.1. *Положительным рядом называют любой числовой ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$*, все члены которого удовлетворяют условию* $a_n \geq 0$.

Замечание. Если неравенство $a_n \geq 0$ выполняется не для всех n, а только для n, начиная с некоторого номера n_0, то мы можем рассматривать не сам исходный ряд, а его остаток $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Согласно утверждению из п.1.2 ряд и любой его остаток либо одновременно являются сходящимися, либо одновременно являются расходящимися. Поэтому предположение о том, что неравенство $a_n \geq 0$ выполняется для всех n, не ограничивает общности изложения.

Теорема 2.1. Положительный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ **сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм** $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k, n = 0, 1, 2, \ldots$ **ограничена сверху.**

Доказательство. Из условия следует:

$$0 \leq s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} = s_{n+1}$$

Таким образом, (s_n) - неубывающая последовательность. Если она ограничена сверху, то по теореме Вейерштрасса (напомним формулировку этой теоремы: всякая неубывающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, и число s, по определению, есть сумма рассматриваемого ряда. Обратно, если последовательность частных сумм имеет предел, то она ограничена, так как любая имеющая предел последовательность ограничена. □

Замечание. В этой теореме условие положительности ряда является существенным.

Например, последовательность частных сумм ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ограничена, так как состоит из всего двух чисел: 0 и 1. Сам же этот ряд, как отмечено выше, расходится, поскольку не удовлетворяет необходимому признаку сходимости.

2.2 Сравнение положительных рядов

Теорема 2.2 (первая теорема сравнения положительных рядов)**. Пусть положительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ для всех n обладают свойством $a_n \leq b_n$. Тогда если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится также и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (значит, если расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$). В случае сходимости рядов выполняется неравенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.**

Доказательство. Пусть s_n, t_n – частные суммы, соответственно, рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Из условия получаем очевидное неравенство $s_n \leq t_n$. Так как по условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по теореме из п.2.1 последовательность t_n ограничена сверху, т.е. существует число T такое, что для всех n выполняется неравенство $t_n \leq T$. Но тогда для всех n выполняется и неравенство $s_n \leq t_n \leq T$, означающее, что последовательность s_n ограничена сверху. По той же теореме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. □

Замечание. Напомним, что заключение теоремы о сходимости останется верным, если неравенства $a_n \leq b_n$ выполняется не для всех n, а только для n, начиная с некоторого номера n_0. Однако неравенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует заменить неравенством $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$.

Теорема 2.3 (вторая теорема сравнения положительных рядов)**. Пусть положительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ при всех n обладают свойством $a_n \geq 0, b_n > 0$, и**

пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$. Тогда либо оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство. Условие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$ запишем в виде: $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0$ $\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \frac{k}{2}$. Для соответствующего n_0 получаем:

$$\forall n > n_0 \quad -\frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} - k < \frac{k}{2}; \quad \frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2},$$

что равносильно неравенствам $n > n_0$, $\frac{k}{2} b_n < a_n < \frac{3k}{2} b_n$, поскольку $b_n > 0$.

Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то, по теореме 1.2 сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3k}{2} b_n$ (мы положили $c = \frac{3k}{2}$ в этой теореме). Но тогда по первой теореме сравнения сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, поскольку при всех $n > n_0$ выполняются неравенства $0 < a_n < \frac{3k}{2} b_n$.

Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то по первой теореме сравнения сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2} b_n$, поскольку при всех $n > n_0$ выполняются неравенства $0 < \frac{k}{2} b_n < a_n$. По теореме 1.2 сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (мы положили $c = \frac{k}{2}$ в этой теореме). □

Выше доказано, что если сходится один из рассматриваемых рядов, то сходится и другой, т.е. не может оказаться так, что один ряд сходится, а другой расходится. Это означает также, что если расходится один из этих рядов, то и другой расходится.

2.3 Положительные ряды и бесконечные q-ичные дроби

Любое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби $\overline{a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$. Эту дробь можно рассматривать, как ряд $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$, у которого a_0 – произвольное целое число, а a_n, $n \geq 1$ – десятичные цифры, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq a_n \leq 9$.

Этот ряд сходится. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить по первой теореме сравнения (2.2) его первый остаток $\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$ со сходящейся геометрической прогрессией $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots$.

Вполне аналогично можно рассмотреть и ряды $a_0 + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \cdots + \frac{a_n}{q^n} + \cdots$, где a_0 – произвольное целое число, а $a_n, n \geq 1$ – q-ичные цифры, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq a_n \leq q-1$, $q \geq 2$. Этот ряд также сходится.

Несложно доказать, что любое действительное число можно представить в виде такого ряда. Кроме того, такое представление единственно для всех чисел, за исключением рациональных чисел, имеющих представление дробью вида $\frac{p}{q^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

2.4 Признаки сходимости Коши и Даламбера положительных рядов

Теоремы сравнения позволяют доказать два простых и удобных признака сходимости положительных рядов, часто используемых на упражнениях по математическому анализу.

Теорема 2.4 (радикальный признак сходимости Коши). **Пусть** $0 < q < 1$**. Если существует такой номер** n_0**, что при** $n \geq n_0$ **выполняется неравенство** $\sqrt[n]{a_n} \leq q$**, то ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится, если же существует такой номер** n_0**, что при** $n \geq n_0$ **выполняется неравенство** $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$**, то ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **расходится.**

Доказательство. Если существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, то выполняются также неравенства $0 \leq a_n \leq q^n$. Так как геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $|q| < 1$, то по первой теореме сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. Если же существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то $a_n \geq 1$. Поэтому равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ невозможно, необходимый признак сходимости не выполнен, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. □

Часто признак Коши формулируют в *предельной форме*:

Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **существует** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$**. Тогда если** $q < 1$**, то ряд сходится. Если** $q > 1$**, то ряд расходится. Случай** $q = 1$ **требует**

дополнительных исследований.

Доказательство. Пусть $q < 1$. Тогда $0 \le q < 1$, ввиду положительности ряда. Выберем $0 < \varepsilon < 1 - q$. Тогда $q + \varepsilon < 1$. По определению предела для заданного ε при $n \ge n_0$ выполняется неравенство $|\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$, откуда $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$. По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $q > 1$, то выберем $0 < \varepsilon < q - 1$. Тогда $q > 1 + \varepsilon$. По определению предела для заданного ε при $n \ge n_0$ выполняется неравенство $|\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$, откуда $\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon > 1$. По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. $\square$

Пример. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$?

Применим признак Коши в предельной форме:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} < 1$$

Ряд сходится.

Теорема 2.5 (признак сходимости Даламбера)**. Если существует такой номер n_0, что при $n \ge n_0$ выполняются неравенства $0 < a_{n+1} < qa_n$, где $0 < q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если существует такой номер n_0, что при $n \ge n_0$ выполняются неравенства $a_{n+1} \ge a_n > 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится**.

Доказательство. В первом случае при $n \ge n_0$ выполняются неравенства $0 < a_{n_0+1} < qa_{n_0}$, $0 < a_{n_0+2} < qa_{n_0+1}, \ldots, 0 < a_{n-1} < qa_{n-2}$, $0 < a_n < qa_{n-1}$. Последовательно двигаясь справа налево, получаем следствие этих неравенств:

$$0 < a_n < qa_{n-1} < q^2 a_{n-2} < \cdots < q^{n-n_0-1} a_{n_0+1} < q^{n-n_0} a_{n_0}$$

Значит, при $n \ge n_0$ имеем: $a_n < \dfrac{a_{n_0}}{q^{n_0}} q^n$. Геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $|q| < 1$. Число $\dfrac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$ представляет собой постоянную, не зависящую от n величину. Поэтому сходится также ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} q^n$. Осталось применить первую теорему сравнения.

Если же существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняются неравенства $a_{n+1} \geq a_n > 0$, то для любого $n \geq n_0 + 1$ имеем: $a_n \geq a_{n_0+1} > 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по необходимому признаку сходимости. $\square$

В *предельной форме* признак Даламбера выглядит так:

Пусть существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $a_n > 0$ и пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда если $q < 1$, то ряд сходится. Если $q > 1$, то ряд расходится. Случай $q = 1$ требует дополнительного исследования.

Доказательство. Пусть $q < 1$. Тогда $0 \leq q < 1$, ввиду положительности ряда. Выберем $0 < \varepsilon < 1 - q$. Тогда $q + \varepsilon < 1$. По определению предела для заданного ε при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$, или $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon$, $a_{n+1} < (q + \varepsilon) a_n$. По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $q > 1$, то выберем $0 < \varepsilon < q - 1$. Тогда $q > 1 + \varepsilon$. По определению предела для заданного ε при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$, откуда $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon$, $a_{n+1} > (q - \varepsilon) a_n$. По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. $\square$

Пример. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$?

Применим признак Даламбера в предельной форме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Ряд сходится.

2.5 Признак сходимости Гаусса

Признаки Коши и Даламбера просты и удобны в применении, но не дают ответа даже в весьма простых случаях. Например, для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$$

и оба изученных в п.2.4 признака не могут дать определенного ответа.

Сформулируем значительно более сильный признак сходимости положительных рядов.

Теорема 2.6 (признак сходимости Гаусса)**. Пусть существует такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $a_n > 0$ и пусть $\varepsilon > 0$ и при $n \to \infty$:**

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$$

Тогда если $\lambda > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $\lambda < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если $\lambda = 1$, то при $\mu > 1$ ряд сходится, а при $\mu \leq 1$ - расходится.

Теорема приводится *без доказательства.* Разберем на приведенных выше примерах способы ее применения.

Сначала рассмотрим так называемый гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. В этом случае $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$. Так как $\lambda = 1,\quad \mu = 1$, этот ряд расходится.

Теперь рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. В этом случае $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{n^2+2n+1}{n^2}=$ $=1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$. Так как $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\varepsilon = 1$, этот ряд сходится.

3 Билет 3. Интегральный признак сходимости Маклорена - Коши

Теория рядов во многом подобна теории несобственных интегралов.

Действительно, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ определяется как предел $\lim\limits_{B\to+\infty} F(B) = \lim\limits_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)\,dx$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также определяется с помощью предельного перехода как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Как доказано выше (теорема 2.1), неотрицательный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ ограничена сверху, т.е. существует некоторая постоянная C такая, что для любого n выполняется неравенство $S_n \le C$. Напомним, что если $f(x) \ge 0$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует некоторая постоянная D такая, что для любого $B \ge a$ выполняется неравенство $\int_a^B f(x)\,dx \le D$.

Схожесть понятий ряда и несобственного интеграла особенно отчетливо видна в следующей теореме.

Теорема 3.1 (интегральный признак сходимости Маклорена-Коши)**. Пусть $f(x)$, определенная при $x \ge 1$, — неотрицательная невозрастающая функция. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.**

Доказательство. Так как функция $f(x)$ — невозрастающая, она является интегрируемой на отрезке $[1, B]$ для любого $B \ge 1$ (вспомним теорему: монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке). Кроме того, для любого натурального числа n на отрезке $[n, n+1]$ выполняются неравенства: $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$

Как отмечалось выше, эти неравенства можно почленно проинтегрировать на отрезке $[n, n+1]$ (вспомним свойство интеграла: если $a < b$ и интегрируемые функции

$f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \leq g(x)$, то и $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$: $\displaystyle\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$). Поскольку $f(n+1)$, $f(n)$ — не зависящие от x величины, т.е. постоянные, имеют место равенства:

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = f(n+1), \quad \int_n^{n+1} f(n)\,dx = f(n)$$

Следовательно, $f(n+1) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$.

Пусть далее $N \geq 2$, N — натуральное число. Просуммируем эти неравенства по n, начиная от $n = 1$ до $n = N - 1$ и получим неравенства:

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(N) \leq \int_1^2 f(x)\,dx + \cdots + \int_{N-1}^N f(x)\,dx \leq$$
$$\leq f(1) + f(2) + \cdots + f(N-1)$$

Сумма интегралов, по свойству аддитивности интеграла, равна $\displaystyle\int_1^N f(x)\,dx$.

В левой и правой частях этих неравенств стоят, соответственно, $S_N - f(1)$ и S_{N-1}.

Таким образом, для любого натурального числа $N \geq 2$ имеем: $S_N - f(1) \leq$ $\leq \displaystyle\int_1^N f(x)dx \leq S_{N-1}$, откуда следует, что $S_N \leq f(1) + \displaystyle\int_1^N f(x)\,dx$. Предположим, что сходится интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Так как функция $f(x) \geq 0$ по условию, критерий существования несобственного интеграла, сформулированный выше, показывает, что существует некоторая постоянная D такая, что для любого $B \geq 1$ выполняется неравенство $\displaystyle\int_1^B f(x)dx \leq D$. Значит, для любого N выполняется неравенство $S_N \leq C = f(1) + D$ и критерий сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ выполнен.

Отметим также, что, переходя к пределу при $N \to \infty$ в неравенстве $S_N \leq f(1) +$ $+\displaystyle\int_1^N f(x)\,dx$, получаем, что сумма ряда не превосходит величины $f(1) + \displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Обратно, если сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, то существует некоторая постоянная C такая, что для любого N выполняется неравенство $S_N \leq C$.

Для произвольного $B \geq 1$ выберем натуральное число N так, чтобы выполнялись неравенства $N \leq B < N+1$. Так как $f(x) \geq 0$, справедливы неравенства

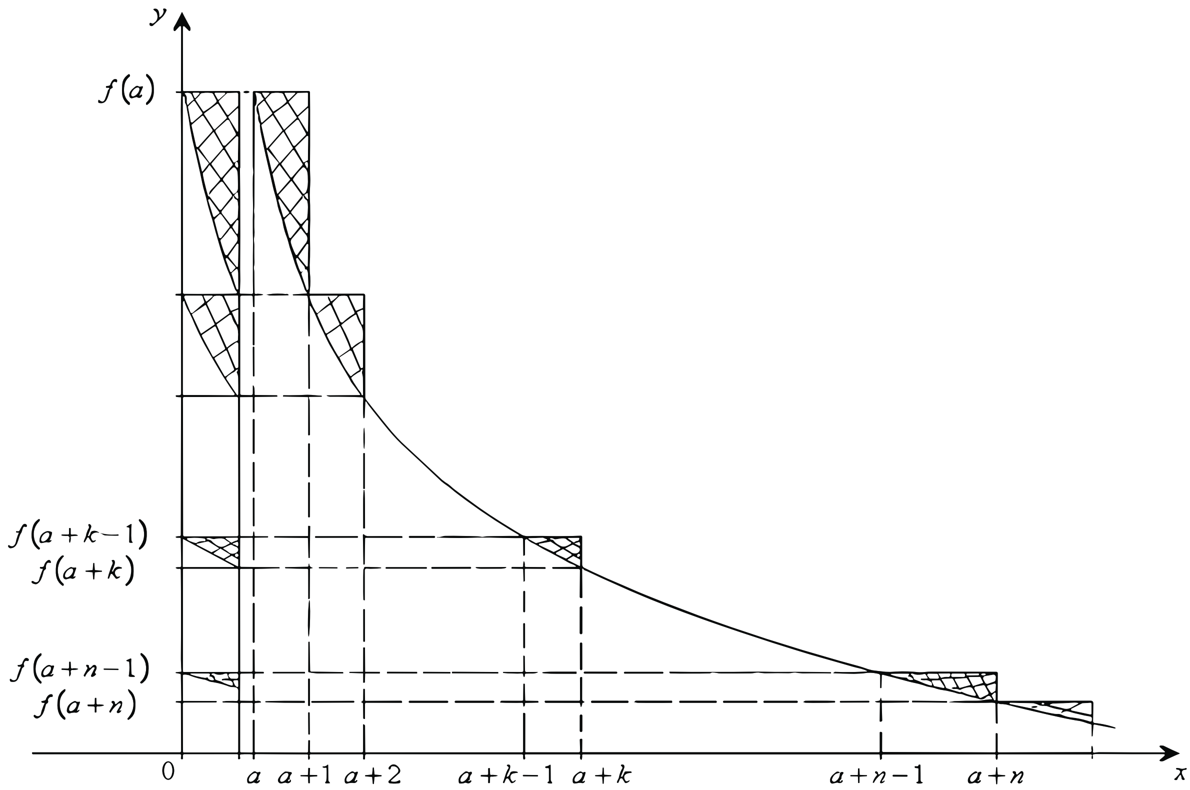
$$\int_1^N f(x)dx \leq \int_1^B f(x)\,dx \leq \int_1^{N+1} f(x)\,dx$$

По доказанному выше, $\displaystyle\int_1^N f(x)\,dx \leq S_{N-1}$ для любого натурального числа N, поэтому оно останется справедливым, если заменить в нем число N числом $N+1$, т.е. $\displaystyle\int_1^{N+1} f(x)dx \leq S_N$. Таким образом, для произвольного $B \geq 1$ имеем:

$$\int_1^B f(x)\,dx \leq \int_1^{N+1} f(x)\,dx \leq S_N \leq C$$

— откуда следует сходимость несобственного интеграла $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. $\square$

Доказанная теорема имеет простую геометрическую иллюстрацию.



На этом рисунке график функции $y = f(x)$ заключен между двумя графиками ступенчатых функций. Площадь каждой ступеньки «верхней» функции на отрезке

$[n, n+1]$ равна $f(n)$, а «нижней» функции — $f(n+1)$. Поэтому неравенства

$$S_N - f(1) \leq \int_1^N f\left(x\right) dx \leq S_{N-1}$$

имеют простой геометрический смысл неравенств между соответствующими площадями. Доказанная теорема имеет важное следствие.

Следствие. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Доказательство. В этом случае $f\left(x\right) = \frac{1}{x^p}$. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. Про него известно, что он сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Осталось применить теорему. □

Замечание. Величина $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ зависит от p и при $p > 1$ может рассматриваться как функция от p. Это одна из наиболее важных в математике функций, носящая название дзета-функции Римана и обозначаемая $\zeta(p)$.

Замечание. Вспомним, что для сходящегося ряда его частную сумму можно рассматривать как приближенное значение суммы ряда, а соответствующий остаток ряда – как погрешность вычисления. Например, для значения $\zeta(p)$ при $p > 1$ имеем

$$\zeta\left(p\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Здесь величина $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p}$ представляет собой приближенное значение $\zeta\left(p\right)$, а остаток ряда $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ — абсолютную погрешность вычисления. Этот остаток можно переписать в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n+N\right)^p}$. Вновь получен ряд рассматриваемого типа $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, в котором теперь $f\left(x\right) = \frac{1}{\left(N+x\right)^p}$. Используем оценку для суммы ряда, доказанную в предыдущей теореме, согласно которой сумма ряда не превосходит величины: $f\left(1\right)+$

$+\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$. В нашем случае это равно $\dfrac{1}{(N+1)^p}+\displaystyle\int_1^{\infty}\dfrac{dx}{(N+x)^p}$. При $p\neq 1$ получаем

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(N+x)^p}=\frac{(N+1)^{1-p}}{p-1}=\frac{1}{(p-1)(N+1)^{p-1}}$$

откуда находим искомую оценку остатка: $\dfrac{1}{(N+1)^{p-1}}\left(\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{N+1}\right)$.

Замечание. В случае, когда ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, неравенства

$$S_N-f(1)\leq\int_1^N f(x)\,dx\leq S_{N-1}$$

дают представление о скорости стремления к бесконечности его частных сумм. Например, для расходящегося гармонического ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ эти неравенства принимают вид:

$$\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N}\leq\int_1^N\frac{dx}{x}\leq 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N-1}\text{ или }\ln N+\frac{1}{N}\leq 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N}\leq\ln N+1$$

(Можно доказать более точную формулу: $1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{N}=\ln N+C+\gamma_N$, где C — так называемая постоянная Эйлера, а $\gamma_N\to 0$ при $N\to\infty$)

4 Билет 4. Ряды с членами произвольных знаков. Абсолютная сходимость

Перейдём к рассмотрению общего случая, когда члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ имеют произвольные знаки и введём два новых ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$.
Члены этих рядов определяются равенствами $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, a_n^- = \min\{a_n, 0\}$. Имеют место равенства:

$$a_n = a_n^+ + a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ - a_n^- \tag{4.1}$$

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, \quad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2} \tag{4.2}$$

Определение 4.1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Таким образом, сходящиеся неотрицательные ряды, рассмотренные в предыдущем параграфе, сходятся абсолютно.

Утверждение. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. Применим к сходящемуся ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ критерий Коши сходимости ряда. Получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon)$ такое, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ и любого натурального p выполняется неравенство $|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$. По свойству модуля $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$, поэтому для исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также выполняется критерий Коши, и он сходится. □

Теорема 4.1. Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильна одновременной сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, но не абсолютно, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся.

Доказательство. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ абсолютно сходится, то по утверждению сходится также ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Тогда из равенств (4.2) и теоремы 1.2 следует, что сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$.

Обратно, пусть сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$. Тогда из равенств (4.1) и теоремы 1.2 следует, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то из равенств (4.2) следует, что оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ расходятся, как полусуммы сходящегося и расходящегося ряда. Теорема доказана. □

Значение этой теоремы состоит в том, что она сводит вопрос об абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, члены которого имеют произвольные знаки, к сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$, члены которых имеют постоянные знаки.

Важным свойством абсолютно сходящегося ряда является его безусловная сходимость. Дадим определение этого понятия. Если переставить члены сходного ряда, т.е. поменять их нумерацию, не добавляя новых членов и не отбрасывая старых, то получится некоторый новый ряд. На первый взгляд, по аналогии с переместительным законом сложения, полученный в результате перестановки ряд должен сходиться и иметь ту же сумму, что и исходный ряд. Но вскоре мы увидим, что это не всегда так! И переместительный закон, доказанный для конечных сумм, не обязательно выполняется для бесконечных рядов.

Свойство сходящегося ряда оставаться сходящимся и не менять суммы при любой перестановке его членов называется *безусловной сходимостью* ряда.

Теорема 4.2 (Дирихле о безусловной сходимости)**. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно, то он сходится безусловно.**

Доказательство. Сначала рассмотрим положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и произведём произвольную перестановку его членов. В результате получится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, для любого члена b_n которого существует такой номер k_n, что $b_n = a_{k_n}$. Частная сумма $s_N^* = b_1 + \dots + b_N = a_{k_1} + \dots + a_{k_N}$. Среди конечного множества чисел $k_1, \dots, k_N$ выберем наибольшее и обозначим его M.

Так как члены ряда неотрицательны по условию, выполняются неравенства $s_N^* = b_1 + \dots + b_N = a_{k_1} + \dots + a_{k_N} \le a_1 + \dots + a_M = s_M$. Таким образом, для любого N существует такое M, что $s_N^* \le s_M$. Так как положительный ряд сходится, его частные суммы s_M ограничены сверху суммой ряда s. Следовательно, частные суммы s_N^* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены сверху этим же числом s. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Кроме того, так как для любого N выполнено неравенство $s_N^* \le s_M$, сумма s^* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ удовлетворяет неравенству $s^* \le s$, то есть при перестановке членов ряда его сумма не возрастает. Для доказательства обратного неравенства $s^* \ge s$ просто рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ как исходный, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – как полученный из него обратной перестановкой. Таким образом, мы получили неравенства $s^* \le s$ и $s^* \ge s$, из которых следует, что $s^* = s$.

Теперь рассмотрим общий случай, когда знаки членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ произвольны. Рассмотрим тогда соответствующие ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. По определению, числа $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- = \min\{a_n, 0\}$ имеют постоянные знаки, из теоремы 4.1 следует, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ сходятся. Согласно равенствам (4.1), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, поэтому перестановка членов ряда приводит к перестановкам членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Но к этим рядам можно применить доказанную первую часть теоремы, согласно которой перестановки не меняют их сумм. Значит, не изменится и сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Теорема доказана. $\square$

5 Билет 5. Условная сходимость

5.1 Теорема Римана

В предыдущем параграфе установлено, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится и безусловно. Однако если ряд сходится не абсолютно, то перестановка членов ряда может изменить его сумму и даже нарушить сходимость ряда. Эти удивительные факты нашли свое отражение в следующей теореме.

Теорема 5.1 (Риман)**. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится не абсолютно, то для любого заданного числа A (так же, как и для $\pm\infty$), существует такая перестановка членов этого ряда, в результате которой получится ряд, сумма которого равна A.**

Доказательство. Ограничимся случаем $A > 0$, так как доказательство в остальных случаях вполне аналогичное. Поскольку рассматриваемый ряд сходится, но не абсолютно, оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся по теореме 4.1.

Рассмотрим последовательности

$$a_1^+,\ a_2^+,\ \ldots,\ a_n^+, \ldots \tag{5.1}$$

$$a_1^-,\ a_2^-,\ \ldots,\ a_n^-, \ldots \tag{5.2}$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ расходится, последовательность его частных сумм стремится к $+\infty$, поэтому, при некотором номере N_1 частная сумма $a_1^+ + \cdots + a_{N_1}^+ > A$. Считаем, что такое N_1 - наименьшее, т.е. что $a_1^+ + \ldots + a_{N_1-1}^+ < A$. Следовательно, $0 < A - (a_1^+ + \cdots + a_{N_1-1}^+) < a_{N_1}^+$ Теперь будем последовательно добавлять слагаемые $a_1^-,\ a_2^-,\ \ldots,\ a_n^-, \ldots$ к сумме $a_1^+ + \cdots + a_{N_1}^+$ до тех пор, пока не получим неравенство $a_1^+ + \cdots + a_{N_1}^+ + a_1^- + \cdots + a_{N_2}^- < A$. При этом и $0 > A - (a_1^+ + \cdots + a_{N_1}^+ + a_1^- + \cdots + a_{N_2-1}^-) > > a_{N_2}^-$. Продолжаем этот процесс, поочередно добавляя к частной сумме слагаемые из последовательностей (5.1) и (5.2) так, чтобы получающиеся в результате суммы становились то больше, то меньше, чем число A, причем разность этих сумм и числа A по абсолютной величине не превосходила бы модуля последнего из добавляемых чисел. Поскольку в последовательностях (5.1) и (5.2) все числа берутся подряд, любой член исходного ряда будет добавлен на некотором шаге, т.е. мы произвели перестановку членов исходного ряда. Кроме того, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, поэтому, ввиду необходимого признака сходимости ряда, его общий член стремится к нулю, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n| < \varepsilon$. Предположим, что мы сделали такое число шагов описанного выше процесса, что взятыми оказались все члены последовательностей (5.1) и (5.2), номера которых, как членов исходного ряда, меньше или равны $N(\varepsilon)$. Поэтому на каждом из следующих сделанных шагов образуемая частная сумма будет отличаться по абсолютной величине от числа A меньше, чем на число ε. Таким образом, полученный ряд будет сходиться к числу A. $\square$

5.2 Теорема Лейбница

Важным примером рядов, сходимость которых может быть неабсолютной, являются знакочередующиеся ряды, т.е. ряды вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n, \quad c_n \geq 0. \tag{5.3}$$

Теорема Лейбница. Пусть члены ряда (5.3) удовлетворяют условиям

1. $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \cdots \geq c_n \geq \cdots$ **(иными словами,** $c_n \geq c_{n+1} \geq 0$ **для всех** n**).**

2. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$**.**

Тогда ряд (5.3) сходится, его сумма s **удовлетворяет неравенствам** $0 \leq s \leq c_1$**.**

Доказательство. Рассмотрим частные суммы ряда (5.3) с четными номерами. Ввиду условия 1 они удовлетворяют неравенствам:

$$s_{2n} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2n-3} - c_{2n-2} + c_{2n-1} - c_{2n} = s_{2n-2} + c_{2n-1} - c_{2n} \geq s_{2n-2}$$

Кроме того, из условия 1 также следует, что

$$s_{2n} = c_1 - (c_2 - c_3) - \dots - (c_{2n-2} - c_{2n-1}) - c_{2n} \leq c_1$$

Последовательность s_{2n} является возрастающей и ограниченной сверху, поэтому она имеет предел по теореме Вейерштрасса. Обозначим его s. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N_1(\varepsilon)$, что для всех номеров $2n$ таких, что $2n > N_1(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$|s_{2n} - s| < \varepsilon \tag{5.4}$$

Кроме того, по доказанному, для любого n выполняются неравенства $0 \leq s_{2n} \leq c_1$. По теореме о предельном переходе в неравенствах имеем

$$0 \leq s \leq c_1 \tag{5.5}$$

Частная сумма с нечетным номером имеет вид: $s_{2n+1} = s_{2n} + c_{2n+1}$. Поэтому из условия 2 получаем: $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (s_{2n} + c_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} c_{2n+1} = s + 0 = s$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N_2(\varepsilon)$, что для всех номеров $2n+1$ таких, что $2n+1 > N_2(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$|s_{2n+1} - s| < \varepsilon \tag{5.6}$$

Положим, для любого $\varepsilon > 0, N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$. Тогда если $N > N(\varepsilon)$, то, ввиду неравенств (5.4) и (5.6), как в случае $N = 2n$, так и в случае $N = 2n+1$ получаем: $|s_N - s| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} s_N = s$. Теорема доказана. □

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ сходится, так как $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Позже будет доказано, что сумма этого ряда равна $\ln 2$.

Замечание. Остаток R_{N-1} ряда (5.3) имеет вид $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n,\ c_n \geq 0$. Если N - четное число, то выполняются неравенства $-c_N \leq R_{N-1} \leq 0$, а если N - нечетное число, то неравенства $c_N \geq R_{N-1} \geq 0$.

Доказательство. Как отмечено выше, при нечетном N ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n,\ c_n \geq 0$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница. Доказанное неравенство (5.5) принимает в этом случае вид $c_N \geq R_{N-1} \geq 0$. Если же N - четное число, то ряд - R_{N-1} удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница и (5.5) равносильно неравенствам $c_N \geq -R_{N-1} \geq 0$ или $-c_N \leq R_{N-1} \leq 0$. □

Это замечание будет использовано при оценке точности приближенных вычислений, использующих ряды.

Приведённый ниже материал не обязателен на экзамене, но весьма полезен для самообразования.

5.3 Суммирование по частям. Теоремы Дирихле и Абеля

Теорема 5.2 (Формула суммирования по частям)**. Пусть даны последовательности** $(a_n)\,,\ (b_n)$**. Положим** $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ **при** $n \geq 0,\ A_{N-1} = 0$**. Тогда для** $0 \leq M \leq N$ **справедлива формула**

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = \sum_{n=M}^{N-1} A_n\left(b_n - b_{n+1}\right) + A_N b_N - A_{M-1} b_M \tag{5.7}$$

Доказательство. Имеют место равенства: $\sum\limits_{n=M}^{N} a_n b_n = \sum\limits_{n=M}^{N}\left(A_n - A_{n-1}\right) b_n = \sum\limits_{n=M}^{N} A_n b_n -$
$- \sum\limits_{n=M-1}^{N-1} A_n b_{n+1} = \sum\limits_{n=M}^{N-1} A_n\left(b_n - b_{n+1}\right) + A_N b_N - A_{M-1} b_M$ □

Теорема 5.3 (Дирихле)**. Пусть**

1. **Частные суммы** s_n **ряда** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ **образуют ограниченную последовательность.**
2. $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$**.**

Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ **сходится.**

Доказательство. Пусть число $A > 0$ удовлетворяет неравенствам $|s_n| \le A$,

$n = 0, 1, 2, \ldots$ Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда из условия 3 теоремы следует, что существует такое число $K(\varepsilon)$, что для любого $n \ge K(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|b_n| < \dfrac{\varepsilon}{2A}$. Для любых $M,\ N,\ \ K(\varepsilon) \le M \le N$ получаем

$$\left|\sum_{n=M}^{N} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=M}^{N-1} s_n\left(b_n - b_{n+1}\right) + s_N b_N - s_{M-1} b_M\right| \le \left|\sum_{n=M}^{N-1} s_n\left(b_n - b_{n+1}\right)\right| + |s_N b_N| + |s_{M-1} b_M| \tag{5.8}$$

по формуле (5.7) и известному свойству модуля. По условию 2, $b_n - b_{n+1} \ge 0$ при всех n. Поэтому

$$\left|\sum_{n=M}^{N-1} s_n\left(b_n - b_{n+1}\right)\right| \le \sum_{n=M}^{N-1} |s_n\left(b_n - b_{n+1}\right)| \le A\left|\sum_{n=M}^{N-1}\left(b_n - b_{n+1}\right)\right| = Ab_M - Ab_N \tag{5.9}$$

кроме того, $|s_N b_N| \le Ab_N,\ \ |s_M b_M| \le Ab_M$ и из (5.8) и (5.9) получаем

$$\left|\sum_{n=M}^{N} a_n b_n\right| \le \left|\sum_{n=M}^{N-1} s_n\left(b_n - b_{n+1}\right)\right| + |s_N b_N| + |s_{M-1} b_M| \le Ab_M - Ab_N + Ab_N + Ab_M =$$

$$= 2Ab_M < 2A\frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon$$

По критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ сходится. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Доказанная в предыдущем пункте теорема Лейбница является следствием теоремы Дирихле, в котором $a_n = (-1)^{n-1},\ \ b_n = c_n$. Суммы s_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ принимают всего два значения: 0 и 1 и можно положить $A = 1$.

Теорема 5.4 (Абель)**. Пусть**

1. **Ряд** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ **сходится.**
2. $b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \ldots$
3. (b_n) **- ограниченная последовательность.**

Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ **сходится.**

Доказательство. Пусть число $B > 0$ удовлетворяет неравенствам $|b_n| \le B$,

$n = 0, 1, 2, \ldots$ Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда из условия 1 теоремы следует, что существует такое число $K(\varepsilon)$, что для любого $n \ge K(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|r_n| = |s - s_n| < \dfrac{\varepsilon}{2B}$. Для любых $M,\ N,\ \ K(\varepsilon) \le M \le N$ получаем

$$\left|\sum_{n=M}^{N} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=M}^{N-1} s_n\left(b_n - b_{n+1}\right) + s_N b_N - s_{M-1} b_M\right| =$$

$$= \left| \sum_{n=M}^{N-1} (s - r_n)(b_n - b_{n+1}) + (s - r_N) b_N - (s - r_{M-1}) b_M \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=M}^{N-1} s (b_n - b_{n+1}) + s b_N - s b_M - \sum_{n=M}^{N-1} r_n (b_n - b_{n+1}) - r_N b_N + r_{M-1} b_M \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{n=M}^{N-1} r_n (b_n - b_{n+1}) \right| + |r_N b_N| + |r_{M-1} b_M|$$

по формуле (5.7) и известному свойству модуля.

По условию 2, $b_n - b_{n+1} \geq 0$ при всех n. Поэтому

$$\left| \sum_{n=M}^{N-1} r_n (b_n - b_{n+1}) \right| \leq \sum_{n=M}^{N-1} |r_n (b_n - b_{n+1})| \leq \frac{\varepsilon}{2B} \left| \sum_{n=M}^{N-1} (b_n - b_{n+1}) \right| = \frac{\varepsilon}{2B} (b_M - b_N) \tag{5.10}$$

кроме того, $|r_N b_N| \leq \dfrac{\varepsilon}{2B} b_N,\ |r_M b_M| \leq \dfrac{\varepsilon}{2B} b_M$ и тогда

$$\left| \sum_{n=M}^{N} a_n b_n \right| \leq \left| \sum_{n=M}^{N-1} r_n (b_n - b_{n+1}) \right| + |r_N b_N| + |r_{M-1} b_M| < \frac{\varepsilon}{2B} (b_M - b_N + b_N + b_M) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2B} 2 b_M < \frac{\varepsilon}{2B} 2B = \varepsilon$$

По критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ сходится. Теорема доказана. □

6 Билет 6. Функциональные последовательности и ряды

6.1 Поточечная сходимость функциональной последовательности и ряда

Пусть $(f_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \dots$ - последовательность функций, определенных на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и пусть эта последовательность имеет предел при любом $x \in X$. В этом случае можно определить предельную функцию $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$ и говорить, что последовательность $(f_n(x))$ **сходится к функции** $f(x)$ **на множестве** X (иногда добавляя слово поточечно).

Аналогично, если все члены ряда $(a_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \dots$ - определены на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и этот ряд сходится при любом $x \in X$, то полагаем $f(x)$ равной пределу частных сумм этого ряда: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$, $x \in X$. Обозначаем также $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$; эта функция называется суммой ряда.

Одна из главных проблем в связи с этими определениями такова: сохраняются ли важнейшие свойства функций $(f_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \dots$, такие, как непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость у предельной функции $f(x)$? Та же проблема важна и для суммы ряда.

Оказывается, эти свойства не всегда сохраняются. Рассмотрим примеры.

Пусть $f_n(x) = x^n$, $x \in [0; 1]$. Найдём предельную функцию $f(x)$. Если $x \in [0; 1)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, а если $x = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$, таким образом предельная функция оказалась разрывной.

Другой пример: $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Очевидно, что для любого x имеем:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = 0$$

Следовательно, для любого x производная $f'(x) = 0$. Однако ${f_n}'(x) = \sqrt{n}\cos nx$ и

${f_n}'(0) = \sqrt{n} \to \infty,\ n \to \infty$. Поэтому последовательность производных $({f_n}'(x))$ не может иметь пределом $f'(x)$.

Наконец, пусть $f_n(x) = nx(1-x^2)^n,\ x \in [0;1], n = 1,2,3,\ldots$ Для любого $x \in (0;1]$ величина $q = 1 - x^2$ удовлетворяет неравенствам $0 \le\ q <\ 1$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxq^n = 0$$

Кроме того, $f_n(0) = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ x \in [0;1]$. Значит,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

Но $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = -\frac{n}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2) = \frac{n}{2n+2}$.

Поэтому $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} \ne 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$.

6.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Примеры, приведенные в предыдущем пункте, показали, что при поточечном предельном переходе могут не сохраниться основные свойства функций, входящих в последовательность. Определим более сильное понятие – равномерную сходимость.

Определение 6.1. *Будем говорить, что последовательность функций* $(f_n(x))$, $n = 1,2,3,\ldots$, *определённых на множестве* $X \subset \mathbb{R}$, ***равномерно сходится на этом множестве к предельной функции*** $f(x)$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $N(\varepsilon)$, *что при* $n > N(\varepsilon)$ *для всех* $x \in X$ *выполняется неравенство:* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Для равномерной сходимости часто используется обозначения $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X.

Укажем на отличие определения равномерной сходимости от определения поточечной сходимости. Определение поточечной сходимости таково: для всех $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon, x)$, что при $n > N(\varepsilon, x)$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Определение равномерной сходимости содержит значительно более сильное требование, состоящее в том, что существует число $N(\varepsilon)$, пригодное в качестве $N(\varepsilon, x)$ для всех $x \in X$.

Определение 6.2. *Ряд* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *называется* ***равномерно сходящимся на множестве*** $X \subset \mathbb{R}$, *если последовательность его частных сумм равномерно сходится на этом множестве.*

Теорема 6.1 (Критерий Коши равномерной сходимости)**. Последовательность функций** $(f_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, **определённых на множестве** $X \subset \mathbb{R}$, **равномерно сходится на этом множестве тогда и только тогда, когда для любого** $\varepsilon > 0$ **существует такое число** $N(\varepsilon)$**, что при** $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$ **для всех** $x \in X$ **выполняется неравенство:** $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть последовательность функций $(f_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, определенных на множестве $X \subset \mathbb{R}$, равномерно сходится на этом множестве к предельной функции $f(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Но тогда при $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$ для всех $x \in X$ выполняется неравенство:

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Обратно, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$ для всех $x \in X$ выполняется неравенство: $|f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, то по критерию Коши существования предела при всех $x \in X$ существует предел $f(x)$ последовательности $(f_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Осталось доказать, что сходимость $(f_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ к функции $f(x)$ является равномерной на множестве X. Для этого, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, выберем такое число $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$ для всех

$x \in X$ выполняется неравенство: $|f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Перейдём в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty : |f_n(x) - f(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. □

Переформулируем этот критерий на случай рядов.

Теорема 6.2. Ряд $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ **равномерно сходится на множестве** $X \subset \mathbb{R}$ **тогда и только тогда, когда для любого** $\varepsilon > 0$ **существует такое число** $N(\varepsilon)$**, что при** $n > N(\varepsilon)$**,** $p > 0$**,** $p \in \mathbb{Z}$ **для всех** $x \in X$ **выполняется неравенство:** $|a_{n+1}(x) + ... + a_{n+p}(x)| < \varepsilon$**.**

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частных сумм ряда. □

Следствие (Необходимый признак равномерной сходимости ряда). **Если ряд** $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ **равномерно сходится на множестве** $X \subset \mathbb{R}$**, то последовательность** $a_n(x)$ **равномерно стремится к** 0 **на множестве** X.

Доказательство. Положим в предыдущей теореме $p = 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$, для всех $x \in X$ выполняется неравенство: $|a_{n+1}(x)| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $a_n(x)$ равномерно стремится к 0 на множестве X. □

Непосредственно из определения равномерной сходимости вытекает простой, но часто полезный критерий.

Теорема 6.3. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$**,** $x \in X$**. Положим** $M_n = \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$**. Последовательность** $(f_n(x))$**,** $n = 1, 2, 3, \ldots$ **равномерно сходится к функции** $f(x)$ **на множестве** X **тогда и только тогда, когда** $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

В качестве примера использования этой теоремы докажем, что последовательность x^n, имеющая на интервале (-1;1) предельную функцию, равную 0, сходится к ней неравномерно. Действительно, $M_n = \sup\limits_{x \in (-1;1)} |x^n - 0| = \sup\limits_{x \in (-1;1)} x^n = 1$. Кстати, отсюда сразу следует, что геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ сходится на интервале (-1;1) неравномерно.

Теорема 6.4 (Вейерштрасса о мажорантной сходимости). **Пусть последовательность функций $a_n(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и пусть для всех n и для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|a_n(x)| \leq c_n$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на множестве X. Кроме того, этот ряд сходится абсолютно для всех $x \in X$.**

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ следует из первой теоремы сравнения положительных рядов.

Далее, сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ означает выполнение критерия Коши. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ и любых p, $h > 0$, $p, h \in \mathbb{Z}$ справедливо неравенство $|c_{n+1} + \dots + c_{n+h}| < \varepsilon$. Из условия теоремы следует, что все числа $c_n \geq 0$ и предыдущее неравенство можно переписать в виде $c_{n+1} + \dots + c_{n+h} < \varepsilon$. Снова используем условие теоремы и получим, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \dots + c_{n+h} < \varepsilon$. Это означает, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ выполнен критерий Коши равномерной сходимости. □

Приведем пример использования этой теоремы.

Рассмотрим геометрическую прогрессию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Докажем, что этот ряд равномерно сходится на любом множестве $[-q, q]$, $0 < q < 1$. Действительно, на этом множестве выполняются неравенства $|x^n| \leq q^n$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится. По теореме Вейерштрасса, он сходится равномерно. Напомним, что выше мы установили, что на всем интервале (-1;1) геометрическая прогрессия сходится неравномерно.

Замечание. Абсолютная сходимость и равномерная сходимость – независимые понятия. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{x+n}$ равномерно сходится на множестве $x \geq 0$, так как, по теореме Лейбница, абсолютная величина его остатка не превосходит $\dfrac{1}{x+n+1} \leq$

$\leq \dfrac{1}{n+1}$. Значит, остаток ряда равномерно стремится к 0, что и означает равномерную сходимость ряда. Однако ряд из модулей $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}$ расходится. Действительно, сравним этот ряд с расходящимся рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Так как $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(x+n)} \frac{n}{1} = 1$, применима вторая теорема сравнения.

Наконец, уже многократно упоминавшаяся геометрическая прогрессия на интервале (-1;1) сходится абсолютно, но неравномерно.

7 Билет 7. Равномерная сходимость и непрерывность

Теорема 7.1. Пусть последовательность функций $(f_n(x)),\ n = 1, 2, 3\ldots$, определённых на множестве $X \subset \mathbb{R}$ равномерно сходится на этом множестве к предельной функции $f(x)$. Пусть a – предельная точка множества X и пусть $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = A_n$. Тогда последовательность (A_n) сходится, причём $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, иными словами, $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$.

Доказательство. По теореме 6.1 (Критерию Коши равномерной сходимости) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$ для всех $x \in X$ выполняется неравенство: $|f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Перейдём в этом неравенстве к пределу при $x \to a$ и получим неравенство $|A_n - A_m| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, означающее, что для последовательности (A_n) выполняется критерий Коши. Поэтому существует предел этой последовательности, который будет обозначен A.

Теперь $|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$.

Сначала выберем n так, чтобы $\forall\, x \in X$ выполнялось неравенство: $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и чтобы $|A_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Такой выбор возможен, так как последовательность функций $(f_n(x)),\ n = 1, 2, 3\ldots$ равномерно сходится на этом множестве к предельной функции $f(x)$ и так как A — предел последовательности (A_n).

Затем подберём такую окрестность $U(a)$ точки a, что для всех $x \in U(a)$ выполняется неравенство $|f_n(x) - A_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Следовательно, для всех $x \in U(a)$ выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

означающее, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. □

Следствие 1. Если последовательность функций $(f_n(x)),\ n = 1, 2, 3\ldots$, непрерывных на множестве $X \subset \mathbb{R}$, равномерно сходится на этом множестве к предельной функции $f(x)$, то $f(x)$ непрерывна на множестве X.

Следствие 2. Пусть функции $a_n(x)$ непрерывны на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на этом множестве. Тогда сумма $f(x)$ этого ряда непрерывна на множестве X.

Доказательство. Достаточно применить предыдущее следствие к последовательности частных сумм ряда. □

7.1 Равномерная сходимость и интегрирование

Теорема 7.2. Пусть последовательность функций $(f_n(x))$, $n = 1, 2, 3\ldots$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, равномерно сходится на этом отрезке к предельной функции $f(x)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$.

Доказательство. По следствию 1 теоремы 7.1 функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, поэтому интегралы в обеих частях доказываемого равенства существуют. Рассмотрим функцию $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b r_n(x)\, dx = 0$. Ввиду равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство: $|r_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)}$. Но тогда при $n > N(\varepsilon)$ имеем:

$$\left| \int_a^b r_n(x)\, dx \right| \le \int_a^b |r_n(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b r_n(x)\, dx = 0$ доказано. □

Следствие. Пусть функции $a_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, dx$$

Доказательство. Достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частных сумм ряда. □

Замечание. Доказанные теорема и следствие останутся верными и при более слабых условиях интегрируемости всех функций $(f_n(x))$, $n = 1, 2, 3\ldots$ (соответственно, $a_n(x)$) на отрезке $[a, b]$.

7.2 Равномерная сходимость и дифференцирование

Теорема 7.3. Пусть все функции $(f'_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ **непрерывны на отрезке** $[a, b]$**. Пусть последовательность** $(f'_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ **равномерно сходится на** $[a, b]$ **и пусть последовательность** $(f_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ **сходится хотя бы в одной точке** $x_0 \in [a, b]$**. Тогда** $(f_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ **равномерно сходится на** $[a, b]$ **к функции** $f(x)$ **и в любой точке** $x \in [a, b]$ **выполняется равенство** $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$**.**

Доказательство. Докажем, что $(f_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ равномерно сходится на $[a, b]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $(f_n(x_0))$ сходится, существует такое число $N_1(\varepsilon)$, что при $n > N_1(\varepsilon)$, $m > N_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство: $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Поскольку последовательность $(f'_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ равномерно сходится на $[a, b]$, существует такое число $N_2(\varepsilon)$, что при $n > N_2(\varepsilon)$, $m > N_2(\varepsilon)$ для любого x из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство: $|f'_n(x) - f'_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Рассмотрим функцию $f_n(t) - f_m(t)$ на отрезке, соединяющем точку x_0 с произвольной точкой x из отрезка $[a, b]$ и применим к этой функции теорему Лагранжа:

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \cdot |x - x_0|,\ \xi \in [x_0, x],$$

откуда

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| = f'_n(\xi) - f'_m(\xi) \cdot |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Положим $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$, тогда если $n > N(\varepsilon)$, $m > N(\varepsilon)$, то для любого x из отрезка $[a, b]$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |\, f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) + (f_n(x_0) - f_m(x_0))\, | \le$$

$$\le |\, f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))\, | + |f_n(x_0) - f_m(x_0)\, | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что доказывает равномерную сходимость $(f_n(x))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $[a, b]$ к некоторой функции $f(x)$.

По следствию 1 теоремы 7.1, последовательность функций $(f_n'(x))$ сходится к непрерывной на $[a, b]$ функции, которую мы обозначим $\gamma(x)$. Пусть x – произвольная точка отрезка $[a, b]$. Тогда, по теореме 7.2,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \gamma(t)\, dt \tag{7.1}$$

Так как для всех n выполняется равенство $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt = f_n(x) - f_n(x_0)$, равенство (7.1) принимает вид

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) = \int_{x_0}^{x} \gamma(t) dt$$

Или, так как $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, $f(x) - f(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \gamma(t)\, dt$. Так как $\gamma(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция, то это равенство означает, что $f'(x)$ существует в произвольной точке x отрезка $[a, b]$ и что $f'(x) = \gamma(x)$. □

Следствие. Пусть функции $a_n'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ сходится равномерно на этом отрезке. Пусть хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке и для любой точки x из отрезка $[a, b]$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$$

8 Билет 8. Степенные ряды

8.1 Радиус сходимости степенного ряда

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{8.1}$$

где c_n - числа, называемые коэффициентами ряда. Так как замена переменной $z = x - x_0$ сразу приводит к ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

имеющему несколько более простой вид, дальнейшие исследования будем проводить именно для рядов такого вида, точнее, для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{8.2}$$

Прежде всего выясним вопрос о сходимости ряда (8.2). Очевидно, что если $x = 0$, то ряд (8.2) сходится, какими бы ни были его коэффициенты.

Теорема 8.1. Если ряд (8.2) сходится, хотя бы неабсолютно, в точке $x = a$, $a \neq 0$, то он сходится и в любой точке x, удовлетворяющей неравенству $|x| < |a|$, причём сходится в этой точке абсолютно.

Доказательство. Представим ряд (8.2) в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n a^n \left(\dfrac{x}{a}\right)^n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n a^n$ сходится, его общий член $c_n a^n$ стремится к нулю, поэтому, начиная с некоторого n_0, выполняются неравенства $|c_n a^n| \leq 1$. Поскольку $\left|\dfrac{x}{a}\right| < 1$, сравнение с геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dfrac{x}{a}\right|^n$ показывает, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ сходится. □

Геометрически эта теорема означает, что областью сходимости ряда (8.2) является промежуток числовой оси, середина которого совпадает с точкой $x = 0$.

Возможны следующие 2 случая. В первом из них множество абсолютных величин

$|a|$ точек $x = a$, в которых сходится рассматриваемый ряд, ограничено сверху. Тогда существует точная верхняя грань этого множества. Эта величина называется радиусом сходимости степенного ряда и обозначается R. Из определения следует, что если $|x| < R$, то ряд (8.2) абсолютно сходится, а если $|x| > R$, то этот ряд расходится.

Во втором случае множество абсолютных величин $|a|$ точек $x = a$, в которых сходится рассматриваемый ряд, не ограничено сверху. Тогда это означает, что ряд (8.2) абсолютно сходится на всей числовой прямой. В этом случае полагаем $R = \infty$.

Для нахождения радиуса сходимости можно воспользоваться одной из следующих формул.

Теорема 8.2.

1. **Если существует** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$**, то** $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ **(когда** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$**, считаем** $R = \infty$**, а если** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$**, то** $R = 0$**).**
2. **Если существует** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$**, то** $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ **(когда** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$**, считаем** $R = \infty$**, а если** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$**, то** $R = 0$**).**

Доказательство. Применим к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ признак сходимости Коши (теорема 2.4). По условию, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{|a_n x^n|}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{|a_n|}\right| \cdot |x|$. Признак Коши даёт следующие утверждения: если $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{|a_n x^n|}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{|a_n|}\right| \cdot |x| < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сходится, если больше 1, то этот ряд расходится. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{|a_n|}\right| \cdot |x| = 0 \cdot |x| = 0 < 1$ для любого x, поэтому ряд всюду сходится и $R = \infty$. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 0$, то при $|x| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{|a_n|}\right|}$ выполняется неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{|a_n|}\right| \cdot |x| < 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сходится, а при $|x| > \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{|a_n|}\right|}$ выполняется неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{|a_n|}\right| \cdot |x| > 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ расходится. Как отмечалось выше, это означает, что $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Вторую формулу получим, если применим к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ признак сходимости Даламбера (теорема 2.5). Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|$ существует по условию.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = 0\cdot|x| = 0 < 1$ для любого x, поэтому ряд всюду сходится и $R = \infty$.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 0$, то при $|x| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ выполняется неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| < 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ сходится, а при $|x| > \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ выполняется неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| > 1$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ расходится. Как отмечалось выше, это означает, что $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$. □

Примеры

1. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ сходится на всей числовой прямой. Для него $R = \infty$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

   Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^p}$ равен 1, так как для любого p выполнено равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^p} \div \frac{1}{n^p}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

2. Наконец, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ сходится только при $x = 0$, т.е $R = 0$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости степенного ряда.*

Как доказано выше, во всех точках этого интервала степенной ряд абсолютно сходится. Что касается концевых точек $x = \pm R$, то ряд может в них как сходиться, так и расходиться. Приведём соответствующие примеры, в каждом из которых $R = 1$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$, сумма геометрической прогрессии, расходится в точках $x = \pm 1$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ расходится при $x = 1$, так как совпадает в этой точке с гармоническим рядом. Однако при $x = -1$ этот ряд сходится по теореме Лейбница (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ – знакочередующийся с монотонно стремящимися к нулю модулями его членов).

Наконец, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ абсолютно сходится в точках $x = \pm 1$ по теореме сравнения (сравниваем с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$).

8.2 Непрерывность степенного ряда

Теорема 8.3. Степенной ряд представляет собой непрерывную функцию на всём интервале сходимости.

Доказательство. Для доказательства теоремы обратимся к лемме:

Лемма 8.1. Пусть $0 < q < R$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на $[-q; q]$ абсолютно и равномерно.

Доказательство. При $x = q$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ сходится абсолютно, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\, q^n$. Так как $\forall x \in [-q; q]$ имеем: $|a_n x^n| \leq |a_n|\, q^n$, из теоремы Вейерштрасса (теорема 6.4)следуют как абсолютная, так и равномерная сходимость ряда на $[-q; q]$ (впрочем, абсолютная сходимость на всём интервале $(-R; R)$ была установлена в п. 8.1). $\square$

Замечание. Доказанная лемма не утверждает равномерной сходимости степенного ряда на его интервале сходимости. Более того, в ряде случаев равномерной сходимости нет. Примером служит геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, про которую в п. 6.2

было доказано, что она не сходится на $(-1;1)$ равномерно.

Продолжим доказательство **теоремы 8.3**. Выберем произвольную точку $x \in (-R;R)$ и докажем, что степенной ряд непрерывен в этой точке. Для этого выберем число q так, чтобы выполнялись неравенства $|x| < q < R$. По предыдущей лемме, степенной ряд равномерно сходится на отрезке $[-q;q]$. Члены степенного ряда – непрерывные функции. По следствию 2 теоремы 7.1 ряд представляет собой функцию, непрерывную на этом отрезке. Следовательно, степенной ряд является непрерывной функцией в произвольной точке $x \in (-R;R)$. □

Следствие. Если два степенных ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ имеют одну и ту же сумму $f(x)$, то для всех n справедливы равенства $a_n = b_n$.

Доказательство. В указанной окрестности выполняется равенство

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

Подставляя в него $x = 0$, получаем $a_0 = b_0$ и, следовательно,

$$a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

Разделим обе части этого равенства на x, считая, что $x \neq 0$. В результате получим равенство

$$a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1} + \cdots = b_1 + b_2x + ... + b_nx^{n-1} + \cdots ,$$

верное при $x \neq 0$. Просто подставить в это равенство $x = 0$ нельзя. Перейдём в нём к пределу при $x \to 0$. Из непрерывности каждого из степенных рядов, стоящих в правой и левой части, следует равенство $a_1 = b_1$. Продолжая рассуждать аналогично, получаем, что для всех n справедливы равенства $a_n = b_n$. □

Теорема 8.4 (теорема Абеля). (*Без доказательства*). **Если степенной ряд сходится в точке $x = R$, то его сумма непрерывна слева при этом значении x, т.е.**

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Лемма 8.2. Если степенной ряд сходится в точке $x = R$, то он сходится равномерно на отрезке $[0; R]$.

Представим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n, 0 \leq x \leq R$ и применим признак Абеля.

8.3 Дифференцируемость и интегрируемость степенного ряда

Теорема 8.5. Степенной ряд в промежутке от 0 до x, где $|x| < R$, можно интегрировать почленно, т.е.

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Доказательство. Значение x может совпадать и с точкой $x = \pm R$, если ряд сходится в этой точке. По лемме 8.2 ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сходится на $[-|x|; |x|]$ равномерно. По следствию теоремы 7.2 получаем требуемое равенство. □

Теорема 8.6. Степенной ряд представляет собой дифференцируемую функцию на всём интервале сходимости, кроме того, для любой точки x из этого интервала

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ сходится в концевой точке интервала сходимости, то в этой точке существует односторонняя производная исходного ряда и равенство сохраняется.

Доказательство. Пусть x – произвольное число из интервала сходимости. Выберем числа q, r так, чтобы выполнялись неравенства $0 < |x| < q < r < R$.

Так как $r < R$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится, поэтому его общий член $a_n r^n$ имеет предел при $n \to \infty$. Следовательно, существует число L такое, что для всех n выполняется неравенство $|a_n| r^n \leq L$. Поэтому

$$n |a_n| |q|^{n-1} = n |a_n| r^n \left|\frac{q}{r}\right|^{n-1} \cdot \frac{1}{r} \leq \frac{L}{r} \cdot n \left|\frac{q}{r}\right|^{n-1}$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{Ln}{r} \cdot \left|\frac{q}{r}\right|^{n-1}$ сходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r \cdot L \cdot (n+1) \cdot \left|\frac{q}{r}\right|^{n}}{r \cdot L \cdot n \cdot \left|\frac{q}{r}\right|^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \left|\frac{q}{r}\right| = \left|\frac{q}{r}\right| < 1$$

Из теоремы Вейерштрасса следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ равномерно сходится на $[-q; q]$. Поэтому почленное дифференцирование исходного ряда законно и доказываемая формула верна. $\square$

Следствие. Обозначим $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тогда для любого натурального k существует производная функции порядка k и справедливо равенство

$$f^{(n)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}$$

Замечание. Из теорем 8.1 и 8.2 вытекает, что радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ не меньше, чем R - радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Однако эти радиусы не могут быть и больше, чем R. Докажем это, например, для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Доказательство. Предположим, что радиус сходимости этого ряда равен R^*, $R^* > R$. Продифференцируем этот ряд почленно и получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. По доказанному выше, радиус сходимости R полученного ряда должен удовлетворять неравенству $R \geq R^*$. Это неравенство противоречит сделанному предположению. $\square$

Итак, радиус сходимости степенного ряда не меняется при его дифференцировании или интегрировании. Однако сходимость в концевой точке $x = \pm R$ у продифференцированного ряда может пропасть.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ сходится на $[-1; 1]$. Однако ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n}$ сходится только на полуинтервале $[-1; 1)$. В самом деле, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится по теореме Лейбница, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится.

Этот же пример показывает, что у проинтегрированного ряда может появиться сходимость в концевой точке.

9 Билет 9. Ряд Тейлора. Разложения основных элементарных функций

9.1 Ряд Тейлора

Теорема 9.1. Если степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ имеет ненулевой радиус сходимости R, вычисляемый формулой $R = \frac{1}{c}$, $c = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, или $R = \frac{1}{d}$, $d = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, и в интервале $(-R,\ R)$ ряд сходится к сумме $f(x)$, то его коэффициенты равны $c_0 = f_0(0)$, $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Так как $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$; $x \in (-R, R)$, то $f(0) = c_0$. Согласно теореме 8.6, $f'(x) = c_1 + 2c_2x + \cdots + nc_nx^{n-1} + \cdots$, $x \in (-R, R)$, то $f'(0) = c_1$, или $c_1 = \frac{f'(0)}{1!}$. Последовательное применение следствия теоремы 8.6 даёт $f^{(k)}(x) = k(k-1)\cdots(k-k+1)\,c_k + (k+1)\,k\cdots(k+1-k+1)\,c_{k+1}x + \cdots$ для любого $x \in (-R, R)$ и любого $k \in \mathbb{N}$, так что $f^{(k)}(0) = k!\,c_k$, или $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$. □

Теорема 9.2. Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \tag{9.1}$$

имеет ненулевой радиус сходимости R, вычисляемый формулой $R = \frac{1}{c}$, $c = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, или $R = \frac{1}{d}$, $d = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, то в интервале его сходимости $(-R + x_0,\ R + x_0)$ его сумма $f(x)$, представима в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots,\ x \in (-R + x_0,\ R + x_0) \tag{9.2}$$

Доказательство. Положив $t = x - x_0$, переведём ряд (9.1) в ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n = g(t)$, $t \in (-R, R)$ и $g(x - x_0) = f(x)$. Согласно теореме 9.1, $c_0 = g(0) = f(x_0)$ и $c_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, так что справедлива формула (9.2) □

Ряд, стоящий в правой части (9.2), называется **рядом Тейлора функции** $f(x)$. Итак, любой степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.

Рассмотрим обратную задачу: всегда ли функция f, порождающая ряд Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, является его суммой. Оказывается, нет.

Даже если ряд Тейлора функции f сходится, он может иметь другую сумму. Рассмотрим функцию $f_0(x)$,

$$f_0(x)=\begin{cases} e^{-1/(x-x_0)^2}, & \text{если } x\neq x_0,\\ 0, & \text{если } x=x_0\end{cases}$$

и положим $t=x-x_0$. Функция $g(t)$,

$$g(t)=\begin{cases} e^{-1/t^2}, & \text{если } t\neq 0\\ 0, & \text{если } t=0\end{cases}$$

имеем $g'(t)=\dfrac{2}{t^3}\,e^{-1/t^2}$, $g''(t)=-\dfrac{2\cdot 3}{t^4}\,e^{-1/t^2}+\dfrac{2}{t^3}\cdot\dfrac{2}{t^3}\,e^{-1/t^2}=\left(\dfrac{4}{t^6}-\dfrac{6}{t^4}\right)e^{-1/t^2},\ldots,$ $g^{(n)}(t)=P_{3n}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)e^{-1/t^2}$, $t\neq 0$, где $P_{3n}(u)$ – некоторый алгебраический многочлен степени $3n$ переменной u. Так как $\lim\limits_{t\to 0}g^{(n)}(t)=\lim\limits_{y\to+\infty}P_{3n}(\pm\sqrt{y})\,e^{-1/y}=0,\ n\in\mathbb{N}$, то $0=g^{(n)}(0)=f_0^{(n)}(x_0),\ n\in\mathbb{N}$. Поэтому $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f_0^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=0,\ x\in\mathbb{R}$.

Последний пример показывает также, что если $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ есть ряд Тейлора функции f, то он же является рядом Тейлора бесконечного множества других функций вида $f+cf_0,\ c\in\mathbb{R}$ – произвольное (поскольку $(f+cf_0)(x_0)=f(x_0)$ и $(f+cf_0)^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)+cf_0^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0),\ n\in\mathbb{N}$).

9.2 Сходимость ряда Тейлора к его производящей функции

Предположим, что функция f бесконечно дифференцируема в интервале I и точка $x_0\in I$, и что промежуток J сходимости её ряда Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ накрывает I (названные условия необходимы для решения задачи, сформулированной в заголовке пункта, в силу доказанных в предыдущем параграфе свойств степенных рядов). Частные суммы ряда $s_n(x) = P_n(x;\ x_0,\ f)$, $x \in J$, $n \in \mathbb{N}$, – многочлены Тейлора функции f в точке x_0.

Поэтому сумма ряда $s(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x; x_0, f)$ для всех $x \in I$ и $s(x) = f(x)$ для $x \in I \subset J$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to+\infty} [f(x) - P_n(x; x_0, f)] = 0$ для каждого $x \in I$. Поскольку в интервале I для функции f справедлива формула Тейлора, то $f(x) - P_n(x; x_0, f) = r_n(x; x_0, f)$, $x \in I$, $n \in N$, где $r_n(x; x_0, f)$ – n-й остаточный член в формуле Тейлора функции f на интервале I. Таким образом, имеет место следующее.

Утверждение. Если функция f бесконечно дифференцируема в интервале I и точка $x_0 \in I$, то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,\ x \in I \tag{9.3}$$

тогда и только тогда, когда последовательность $(r_n(x))$ остаточных членов $r_n(x) = r_n(x; x_0, f)$, $n \in \mathbb{N}$, в её формуле Тейлора на I сходится к нулевой функции для всех $x \in I$.

Укажем простое достаточное условие для справедливости утверждения (9.3).

Теорема 9.3. Если функция f бесконечно дифференцируема на отрезке между x_0 и x (на $\mathbb{R}$) и все её производные функции $f^{(n)}(t)$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно ограничены на этом отрезке, то $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, т.е. ряд Тейлора функции f сходится в точке x к сумме $f(x)$.

Доказательство. Рассмотрим остаточные члены $r_n(x; x_0, f)$ в форме Лагранжа

$$r_n(x; x_0, f) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ 0 < \theta < 1$$

По условию теоремы, существует число $M > 0$, что $\left|f^{(n)}(t)\right| \leq M$ для всех t между

x_0 и x, и всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому,

$$|r_n(x; x_0, f)| \le \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}, \ x \ne x_0 \tag{9.4}$$

Обозначим $u_n = \dfrac{M}{n!} |x - x_0|^n, \ x \ne x_0, \ n \in \mathbb{N}$. Тогда $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|x - x_0|}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$. Согласно признаку Даламбера, ряд $\sum u_n$ сходится, и следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. На основании (9.2), $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x; x_0, f) = 0$ и справедливо утверждение (9.3). $\square$

9.3 Ряды Тейлора элементарных функций

Рассмотрим разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

I. Функция $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x, \ x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$, и $f^{(n)}(0) = f(0) = 1, \ n \in \mathbb{N}$. Для произвольного фиксированного $x \in \mathbb{R}$ справедливо $\left|f^{(n)}(t)\right| = e^t \le e^{|x|}$ для всех t между 0 и x, и всех $n \in N$. Согласно теореме предыдущего пункта,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R} \tag{9.5}$$

Для сумм $r_n(x)$ остатков ряда (9.5) справедлива оценка (9.4), в которой $M = e^{|x|}$ и $x_0 = 0$, так что

$$|r_n(x)| \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \ x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N},$$

последняя оценка указывает на скорость сходимости ряда (9.5) в точках $x \in \mathbb{R}$.

II. Функция $f(x) = \sin x, \ x \in \mathbb{R}$, имеет $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}k\right)$, $\left|f^{(k)}(x)\right| \le 1$, $x \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{N}$, и следовательно, её формула Тейлора переходит в ряд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \ x \in \mathbb{R} \tag{9.6}$$

Для сумм $r_n(x)$ остатков ряда (9.6) в силу (9.4) справедливы оценки

$|r_{2n}(x)| \le \dfrac{1}{(2n)!}\,|x|^{2n}\,,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$

III. Функция $f\,(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$, имеет $f^{(k)}\,(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}k\right),\ \left|f^{(k)}(x)\right| \le 1$, $x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$, и следовательно,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n},\ x \in \mathbb{R} \qquad (9.7)$$

Для сумм $r_n(x)$ остатков ряда (9.7) на основании (9.4) справедливы оценки $|r_{2n+1}(x)\ | \le \dfrac{1}{(2n+1)!}\,|x|^{2n+1}\,,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$

IV. Функция $f\,(x) = \ln\,(1+x),\ x > -1$, имеет производную

$$f'\,(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n\,x^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,x^n,\ x \in (-1,1)$$

и радиус сходимости ряда равен 1. И поэтому, с учётом теоремы 7.3,

$$f\,(x) - f\,(0) = \int_0^x f'\,(t)\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}x^{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,$$

$x \in (-1,1)$, откуда

$$\ln\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n,\ x \in (-1,1) \quad (9.8)$$

поскольку $f\,(0) = \ln 1 = 0$. В $x = 1$ имеем ряд Лейбница $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$; в $x = -1$ – расходящийся ряд – $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$, так что промежуток сходимости ряда (9.8) служит $(-1,1]$.

V. Биномиальный ряд.

Утверждения этого пункта приводятся без подробного доказательства.

Разложим в степенной ряд функцию $f\,(x) = (1+x)^{\alpha},\ x > 1,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + x^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} C_\alpha^k x^k, \ x \in \mathbb{R}$$

Если $\alpha = 0$, то $f(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \backslash N_0$, $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \dots, \ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

и при $n > \alpha$ функция $f^{(n)}$ не существует в точке $x = -1$. Отсюда следует, что радиус сходимости R степенного ряда для удовлетворяет условию $R \le 1$. Вычисление радиуса по теореме 8.2 даёт $R = 1$. Кроме того,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \ |x| < 1 \tag{9.9}$$

В точке $x = -1$ получаем ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \tag{9.10}$$

который абсолютно сходится при $\alpha > 0$ и расходится при $\alpha < 0$; в точке $x = 1$ - ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \tag{9.11}$$

абсолютно сходится при $\alpha > 0$, сходится условно при $-1 < \alpha < 0$ и ряд расходится при $\alpha \le -1$.

VI. Использованный в п. IV приём можно применять к любому степенному ряду с ненулевым радиусом сходимости. Продемонстрируем его на примере разложения в степенной ряд функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Имеем $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \tag{9.12}$$

$x \in (-1, 1)$ и

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x 1 \cdot dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \; x \in (-1, 1),$$

откуда

$$\operatorname{arctg} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad (9.13)$$

$x \in (-1, 1)$, поскольку $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$.

9.4 Экспоненциальная функция комплексного переменного

Степенной ряд $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ абсолютно сходится для всех $z \in \mathbb{C}$, т.к. для его общего члена $a_n(z) = \frac{z^n}{n!}$ при $z \neq 0$ $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1$ и применяем признак Даламбера.

Обозначим $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = E(z), \; z \in \mathbb{C}$.

Теорема 9.4. $E(z) \cdot E(w) = E(z + w), \; z, \, w \in \mathbb{C}$. (Без доказательства).

Таким образом, функция $E(z), \; z \in \mathbb{C}$, удовлетворяет такому же функциональному уравнению, что и экспоненциальная функция $e^x, \; x \in \mathbb{R}$. Кроме того, если $z = x$, то $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \; x \in \mathbb{R}$. Поэтому, по определению, обозначают $E(z) = e^z, \; z \in \mathbb{C}$, и

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \; z \in \mathbb{C} \quad (9.14)$$

Если в (9.14) положить $z = ix, \; i^2 = -1, \; x \in \mathbb{R}$, и заметить, что $i^3 = -i, \; i^4 = 1$, то:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \cos x + i \sin x, \; x \in \mathbb{R}$$

Таким образом, доказана **формула Эйлера**:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,\ x \in \mathbb{R}$$

Она справедлива и для комплексных $z \in \mathbb{C}$ в виде $e^{iz} = \cos z + i \sin z,\ z \in \mathbb{C}$. Прямым следствием теоремы и формулы Эйлера будет **формула Муавра-Эйлера**: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. $\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, и применяем формулу Эйлера. $\square$

10 Билет 10. Ортонормированные системы функций. Обобщённые ряды Фурье. Тригонометрические ряды Фурье. Теорема о сходимости (без док-ва)

10.1 Ортонормированные системы функций

Билет содержит много материала, данного мелким шрифтом. **На экзамене он необязателен, но очень полезен.**

Множество функций, определённых на некотором отрезке $[a, b]$, образует векторное пространство относительно обычного сложения и умножения функции на число. Легко доказать, что такое пространство не является конечномерным, так как, например, функции $x,\ x^2, \ldots,\ x^n,\ \ldots$ линейно независимы. Предположим, что определено скалярное произведение, т.е. билинейная функция, сопоставляющая каждой паре рассматриваемых функций $f(x)$ и $g(x)$ некоторое число, обозначаемое $(f(x), g(x))$, причём выполняются такие свойства:

1. $(f(x), g(x)) = (g(x), f(x))$.

2. $(f(x), f(x)) \geq 0$, причём $(f(x), f(x)) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) \equiv 0$.

3. $(\alpha f(x) + \beta g(x), h(x)) = \alpha (f(x), h(x)) + \beta (g(x), h(x))$.

Далее будем кратко обозначать скалярное произведение (f, g). Имея скалярное произведение, определим норму функции $\| f \|$ равенством $\| f \| = \sqrt{(f, f)}$.

Определение 10.1. *Система функций называется **ортогональной**, если для любых различных $f,\ g$ из этой системы имеем $(f, g) = 0$. Ортогональная система функций называется **ортонормированной**, если для любой функции из этой системы имеет место равенство $\| f \| = \sqrt{(f, f)} = 1$.*

Любую ортогональную систему функций, не содержащую тождественно равную нулю функцию, можно преобразовать в ортонормированную систему функций, положив для любой функции f из этой системы $\varphi = \dfrac{f}{\| f \|}$.

Рассмотрим пример **скалярного произведения интегрируемых функций** $f(x)$ и $g(x)$, определённого равенством

$$((f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \tag{10.1}$$

Легко видеть, величина (10.1) действительно обладает свойствами 1 и 3 скалярного произведения. Что касается свойства 2, то для всего лишь интегрируемых функций оно не выполняется, т.е. из равенства

$$\int_a^b f^2(x)\, dx = 0 \tag{10.2}$$

не следует, что $f(x) \equiv 0, x \in [a, b]$. Например, для отличной от тождественного нуля функции $f(x)$, равной 1 при $x = 0$ и равной 0 во всех остальных точках отрезка $[-1; 1]$, равенство (10.2) выполняется. Ситуация исправится, если мы ограничимся непрерывными функциями.

Лемма 10.1. Если функция f непрерывна на $[a, b]$, $a < b$, и если $\int_a^b f^2(x) dx = 0$, то $f(x) \equiv 0, x \in [a, b]$.

Доказательство. Если бы тождество $f(x) \equiv 0$ не имело места, то нашлась бы такая точка x_0, в которой $f^2(x_0) > \varepsilon > 0$. Так как функция непрерывна, то найдётся такая окрестность (α, β) этой точки, принадлежащая промежутку $[a, b]$, что в ней справедливо неравенство $f^2(x) > \dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$\int_a^b f^2(x) dx \geq \int_\alpha^\beta f^2(x) dx \geq \frac{\varepsilon}{2}(\beta - \alpha) > 0,$$

что противоречит условию леммы. □

Определение 10.1 ортогональности принимает вид:

Определение 10.2. *Две интегрируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются* ***ортогональными*** *на отрезке $[a, b]$, если $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Конечная или бесконечная система функций называется* ***ортогональной*** *на отрезке $[a, b]$, если любые две функции этой системы ортогональны на этом отрезке.*

Важный пример ортогональной системы функций даёт тригонометрическая система функций.

Теорема 10.1. Тригонометрическая система функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \ldots,$ $\cos nx, \sin nx, \ldots$ **ортогональна на отрезке** $[-\pi, \pi]$**.**

Доказательство. Прежде всего установим ортогональность каждой функции системы с первой из них. Имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx\, dx = \left[\frac{1}{k} \sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kx\, dx = \left[-\frac{1}{k} \cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{k}(-1)^k + \frac{1}{k}(-1)^k = 0$$

Опираясь теперь на известные из средней школы тригонометрические формулы, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (k+l)x + \cos (k-l)x]\, dx = 0,\ \ k \neq l,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (k-l)x - \cos (k+l)x]\, dx = 0,\ \ k \neq l,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos lx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin (k+l)x + \sin (k-l)x]\, dx = 0$$

Последнее равенство справедливо и при $k = l$. $\square$

10.2 Коэффициенты Фурье. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя

Рассмотрим множество функций, определённых на некотором отрезке $[a, b]$. Оно образует векторное пространство относительно обычного сложения и умножения функции на число. Пусть определено некоторое скалярное произведение. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ – некоторая ортонормированная система.

Определение 10.3. *Числа*

$$c_n = (f, \varphi_n) \tag{10.3}$$

называются ***коэффициентами Фурье*** *функции f. Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \tag{10.4}$$

называется её ***рядом Фурье.***

Вопрос о сходимости ряда Фурье (10.4) сложен и будет исследован позже. Пока используем формальную запись $f \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$, означающую, что функции f соответствует её ряд Фурье (10.4).

Мелкий шрифт – на экзамене необязательно! Перейдём к минимальному свойству коэффициентов Фурье. Обозначим $s_N = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n \varphi_n$ – частичную сумму ряда Фурье функции f. Пусть $t_N = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n \varphi_n$ – некоторая сумма, имеющая другие коэффициенты.

Теорема 10.2 (минимальное свойство коэффициентов Фурье)**. Для любой суммы $t_N = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n \varphi_n$ выполняется неравенство**

$$(f - t_n)^2 \geq (f, f) - \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \tag{10.5}$$

причём равенство в (10.5) **достигается тогда и только тогда, когда $b_n = c_n$ для всех $n = 1, \dots, N$.**

Доказательство. Вычислим скалярный квадрат:

$$(f - t_n)^2 = \left(f - \sum_{n=1}^{N} b_n\varphi_n,\ f - \sum_{n=1}^{N} b_n\varphi_n\right) = (f, f) - 2\sum_{n=1}^{N} b_n(f, \varphi_n) + \left(\sum_{n=1}^{N} b_n\varphi_n\right)^2$$

Поскольку $(\varphi_m, \varphi_n) = 0,\ m \neq n,$

$$\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\varphi_n\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} b_n\varphi_n,\ \sum_{n=1}^{N} b_n\varphi_n\right) = \sum_{n=1}^{N} b_n^2$$

согласно (10.1), имеем

$$(f - t_n)^2 = (f, f) - 2\sum_{n=1}^{N} b_n c_n + \sum_{n=1}^{N} b_n^2 = (f, f) - \sum_{n=1}^{N} c_n^2 + \sum_{n=1}^{N} c_n^2 - \ 2\sum_{n=1}^{N} b_n c_n + \sum_{n=1}^{N} b_n^2 =$$

$$= (f, f) - \sum_{n=1}^{N} c_n^2 + \sum_{n=1}^{N} (c_n - b_n)^2$$

Теорема доказана, так как величина $\sum\limits_{n=1}^{N} (c_n - b_n)^2 \ \geq\ 0$, причём она равна нулю тогда и только тогда, когда $b_n = c_n$ для всех $n = 1,\ \ldots,\ N$. □

Теорема 10.3 (неравенство Бесселя)**.**

$$\| \ f \ \|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \tag{10.6}$$

Доказательство. В теореме 10.2 для любого N доказано равенство

$$(f - t_n)^2 = (f, f) - \sum_{n=1}^{N} c_n^2 + \sum_{n=1}^{N} (c_n - b_n)^2$$

Положив в нём $b_n = c_n$ для всех $n = 1, \ldots, N$ получаем $(f - s_n)^2 = (f, f) - \sum\limits_{n=1}^{N} c_n^2$, откуда $(f, f) - \sum\limits_{n=1}^{N} c_n^2 \geq 0$, или $\| \ f \ \|^2 \geq \sum\limits_{n=1}^{N} c_n^2$. В левой части неравенства стоит частичная сумма ряда с неотрицательными членами. Все эти суммы ограничены для любого N одним и тем же числом $\| \ f \ \|^2$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ сходится и выполнено (10.6). □

10.3 Тригонометрический ряд Фурье, его коэффициенты

Определение 10.4. ***Тригонометрическим многочленом*** *называется функция вида*

$$T(x) = \frac{A_0}{2} + (A_1 \cos x + B_1 \sin x) + (A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x) + \dots + (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

где $A_0, A_k, B_k, k = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$ *– действительные числа. Если* $A_n^2 + B_n^2 \neq 0$*, то число* n *называется* ***порядком (степенью)*** *тригонометрического многочлена* $T(x)$ *и имеет обозначение* $\deg T = n$.

Функциональный ряд

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \tag{10.7}$$

называется тригонометрическим рядом. **Коэффициенты** ряда $A_0, A_n, A_n, n \in \mathbb{N}$ – произвольные действительные числа. **Частные суммы** $s_n(x)$ тригонометрического ряда (10.7)

$$s_0(x) = \frac{A_0}{2}, \ \ s_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx), \ \ n = 1, 2, \dots$$

тригонометрические многочлены порядка $\deg s_n \leq n$.

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ (т.е. $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$).

Числа

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \tag{10.8}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, n = 1, 2, \dots \tag{10.9}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, n = 1, 2, \dots \tag{10.10}$$

называются **коэффициентами Фурье** функции $f(x)$.

Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{10.11}$$

(независимо от того, сходится он, или расходится) коэффициенты которого – коэффициенты Фурье функции $f\in\mathcal{R}\left[-\pi,\pi\right]$, называется **рядом Фурье** этой функции.

Связь между функцией $f(x)$ и её рядом Фурье принято обозначать так:

$$f\left(x\right),\ x\in\left[-\pi,\pi\right]\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Частными суммами $s_n(f;x)$ ряда Фурье (10.11) функции $f(x)$ будут тригонометрические многочлены

$$s_0\left(f;x\right)=\frac{a_0}{2},\ s_n\left(f;x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),\ n=1,2,\ldots \tag{10.12}$$

порядка $\deg s_n\leq n$. Разумеется, если функция $f(x)$ разрывна, то её ряд Фурье не будет равномерно сходиться к ней (сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна). Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 10.4. Равномерно сходящийся на $[-\pi,\pi]$ **тригонометрический ряд** (10.11) **есть ряд Фурье своей суммы.**

Доказательство. Пусть тригонометрический ряд (10.11) равномерно сходится на $[-\pi,\pi]$ и $f(x)$ – его сумма, так что

$$f\left(x\right)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos kx+B_k\sin kx\right) \tag{10.13}$$

и функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$. Более того, $f(x)$ – непрерывная и 2π- периодическая функция на всём множестве $\mathbb{R}$.

Интегрируя почленно ряд (10.13) и учитывая ортогональность тригонометрических функций, получим $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A_0}{2}dx=A_0$, и, согласно (10.8), $A_0=a_0$. Умножив равенство (10.13) на $\cos kx$ и проинтегрировав, найдём $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos k\,dx=$

$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} A_k \cos^2 k\, dx = A_k$, и, согласно (10.9), $A_k = a_k, k \in \mathbb{N}$. Аналогично, умножив равенство (10.13) на $\sin kx$, покажем, что $B_k = b_k,\ k \in \mathbb{N}$ (на основании (10.10). $\square$

Тригонометрический многочлен $T(x),\ \deg T \le n,\ n \in \mathbb{N}$, можно считать (конечным) тригонометрическим рядом, имеющим нулевые коэффициенты f для всех индексов, бóльших n , и поэтому равномерно сходящимся на всём множестве $\mathbb{R}$. Согласно теореме 10.4, многочлен $T(x)$ совпадает со своим (конечным) рядом Фурье, коэффициенты которого равны нулю для всех индексов, больших индекса $n = \deg T$. В частности, указанным свойством обладают частные суммы ряда Фурье, то есть справедливо следующее следствие.

Следствие. Для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ **частные суммы** $s_n(f; x)$ **ряда Фурье** (10.11) **функции** $f \in \mathcal{R}\,[-\pi, \pi]$ **имеют одинаковые с** f **коэффициенты Фурье для всех индексов** $k,\ 0 \le k \le n$**.**

10.4 Коэффициенты Фурье чётных и нечётных функций. Примеры

Напомним, что если функции $f, g \in \mathcal{R}\,[-a, a]$ и f – чётная, а g – нечётная, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx, \quad \int_{-a}^{a} g(x)\, dx = 0$$

в чём легко убедиться, представив интеграл $\int_{-a}^{a}$ в виде суммы интегралов $\int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a}$ и заменив в первом из них x на $-x$. Поэтому, если функция $f \in \mathcal{R}\,[-\pi, \pi]$ и f – чётная, то её коэффициенты Фурье равны

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx,\ n = 0, 1, 2, \dots, \quad b_n = 0,\ n = 1, 2, \dots, \tag{10.14}$$

так что

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{10.15}$$

а если f – нечётная, то

$$a_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\, dx,\ n = 1, 2, \ldots \tag{10.16}$$

и

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{10.17}$$

Пример. Рассмотрим 2π–периодическую функцию f, $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда $b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$ и

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right],$$
$$n \in \mathbb{N},$$

так что

$$a_0 = \pi,\ a_{2k} = 0,\ a_{2k-1} = -\frac{4}{\pi(2k-1)^2},\ k = 1, 2, \ldots$$

Кроме того, по теореме 10.4,

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},\ x \in [-\pi, \pi] \tag{10.18}$$

поскольку тригонометрический ряд Фурье в правой части формулы (10.18) равномерно сходится на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса (сходится мажорирующий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$). В точке $x = 0$ имеем

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Поэтому

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} A,$$

откуда

$$A = \frac{\pi^2}{6}$$

так что

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Напомним про минимальное свойство коэффициентов Фурье, переформулировав его для тригонометрической системы.

Теорема 10.5. Если функция $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ и $T_n(x)$, $\deg T_n(x) \le n$ - произвольный тригонометрический многочлен, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(f;x)]^2 \, dx \le \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(f;x)]^2 \, dx \tag{10.19}$$

и равенство в (10.19) достигается только для $T_n(x) = s_n(f;x)$.

Неравенство Бесселя примет вид

Теорема 10.6. Если функция $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \tag{10.20}$$

Следствие теоремы 10.6 (неравенства Бесселя). Коэффициенты Фурье интегрируемой функции стремятся к нулю.

Ряд в левой части неравенства (10.20) сходится. Поэтому выполнен необходимый признак сходимости, согласно которому $a_k^2 + b_k^2 \to 0, k \to \infty$. Поэтому $a_k^2 \to 0, k \to \infty$, $b_k^2 \to 0, k \to \infty$. Следовательно, $a_k \to 0, k \to \infty, b_k \to 0, k \to \infty$.

10.5 Сходимость ряда Фурье в точке

Мы установили, что равномерно сходящийся тригонометрический ряд есть ряд Фурье своей суммы (теорема 10.4). Аналогичным свойством обладают ряды Тейлора: степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости есть ряд Тейлора своей суммы. В случае рядов Тейлора расходимость в точке обязательно ведёт к расходимости и в одной из половин окрестности точки. Это свойство рядов Тейлора не переносится на ряды Фурье. Ряд Фурье может быть расходящимся в одних точках и одновременно быть сходящимся в окрестности этих точек.

10.5.1 Частные суммы ряда Фурье интегрируемой и периодической функции

Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathcal{R}\,[-\pi,\pi]$ и потребуем дополнительно, чтобы $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогда функция f распространяется на всю числовую прямую $(-\infty,+\infty)$, как $2\pi-$ периодическая функция, которая, при этом, будет интегрируемой на любом отрезке $[a,b]$, $-\infty<a<b<+\infty$. Обратно, любую $2\pi-$ периодическую функцию f на $(-\infty,+\infty)$ считаем определённой на отрезке $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяющей условию $f(-\pi)=f(\pi)$.

Лемма 10.2. Если $f \in \mathcal{R}\,[\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то для частных сумм $s_n(f;x)$ ряда Фурье функции f справедливы формулы

$$s_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,(x+y)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}\,dy,\ n=0,1,2,\ldots \tag{10.21}$$

Без доказательства.

Чётную функцию $D(y)=\dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y}{2\sin\dfrac{y}{2}}$, $D(-y)=D(y)$, называют **ядром Дирихле**.

10.5.2 Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке и его следствия

Укажем теперь достаточные условия сходимости ряда Фурье функции $f\in\mathcal{R}\,[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, в точках интервала $(-\pi,\pi)$. Для этого фиксируем произвольную точку $x_0\in(-\pi,\pi)$ и преобразуем формулу (10.21) для частных сумм

$$s_n(f;x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-0}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt, \quad (10.22)$$

где в первом интеграле суммы вместо переменной интегрирования t мы выбрали переменную $-t$ и воспользовались чётностью ядра Дирихле.

Поскольку у функции $f(x)\equiv 1$ все $s_n(f;x)\equiv 1$, то из (10.22) следует, что $1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$. Умножая обе части этого равенства на постоянное число s_0 – предполагаемую сумму ряда в x_0, точное значение которого мы установим ниже, и вычитая из (10.22), найдём

$$s_n(f;x_0) - s_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt, \quad (10.23)$$

где для краткости положено

$$\varphi(t) = f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s_0 \quad (10.24)$$

Если мы хотим установить, что s_0 действительно является суммой ряда, то для этого нужно доказать, что интеграл в (10.23) при $n\to+\infty$ стремится к нулю. Обратимся к выбору самого числа s_0. В практических приложениях важны два случая, когда (а) функция f непрерывна в точке x_0, либо (б) fимеет в этой точке разрыв первого рода (скачок), так что оба предела $f(x_0+0), f(x_0-0)$ существуют. Поэтому ограничим себя только этими двумя случаями и положим

- в случае (а): $s_0 = f(x_0)$,
- в случае (б): $s_0 = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Теорема 10.7 (признак Дини)**. Ряд Фурье функции** $f\in\mathcal{R}[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ **сходится в точке** $x_0\in(-\pi,\pi)$ **к сумме** s_0**, если при некотором** $h>0$ **несобственный интеграл** $\int_0^h \frac{|\phi(t)|}{t}\,dt$ – **интеграл Дини – сходится.**

Без доказательства. В развёрнутом виде интеграл Дини записывается так:

- в случае (а): $\displaystyle\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)|}{t}dt$,
- в случае (б): $\displaystyle\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)|}{t}dt$,

и, следовательно, достаточно предположить существование порознь интегралов (смотря по случаю)

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{t}dt, \int_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0)|}{t}dt, \quad (10.25)$$

или

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}dt, \int_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}dt.$$

Теорема 10.8 (признак Липшица). **Ряд Фурье функции** $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ **сходится в точке** $x_0 \in (-\pi,\pi)$**, где она непрерывна, к сумме** $f(x_0)$**, если для всех** $t>0$ **выполняется неравенство** $|f(x_0 \pm t)-f(x_0)| \le Lt^\alpha$**, в котором** L, α **– положительные постоянные и** $\alpha \le 1$**.**

Доказательство. В случае $\alpha = 1$ $\dfrac{|f(x_0 \pm t)-f(x_0)|}{t} \le L$, так что интегралы (10.25) существуют, как собственные. Если же $0<\alpha<1$, то $\dfrac{|f(x_0 \pm t)-f(x_0)|}{t} \le \dfrac{L}{t^{1-\alpha}}$, и так как справа стоит интегрируемая функция, то интегралы (10.25) существуют, как несобственные. □

В частности, условие Липшица при $\alpha=1$ заведомо будет выполняться, если у функции f в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$, или, по крайней мере, конечные односторонние производные $D^+f(x_0)=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$, $D^-f(x_0)=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t}$, хотя бы и различные между собой («угловая точка»). Таким образом, в точке x_0, где функция f дифференцируема или, по крайней мере, имеет обе конечные односторонние производные, ряд Фурье сходится, причём сумма его равна $f(x_0)$.

Нетрудно перефразировать признак Липшица и для случая (б).

Как частное следствие, получим здесь, что в точке x_0 разрыва первого рода функции f для сходимости её ряда Фурье достаточно предположить существование конечных пределов

$$D^+f(x_0)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}, \quad D^-f(x_0)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t},$$

причём на этот раз суммой ряда будет $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Сформулируем *без доказательства* теорему.

Теорема 10.9. В точке x_0**, где функция** f **дифференцируема или, по крайней мере, имеет обе конечные односторонние производные, ряд Фурье сходится, причём сумма его равна**$f(x_0)$**. В точке** x_0 **разрыва первого рода функции** f **для сходимости её ряда Фурье достаточно предположить существование конечных пределов**

$$D^+f(x_0)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}, \quad D^-f(x_0)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t},$$

причём на этот раз суммой ряда будет $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

10.6 Обобщённые тригонометрические ряды

До сих пор мы говорили о разложении функций, имеющих период 2π, в ряд по тригонометрическим функциям. Однако могут быть и функции, период которых $2l$ отличен от 2π. В этом случае, если число $\dfrac{\pi}{l}$ – нецелое, то нельзя разложить функцию в ряд по тригонометрическим функциям $\cos kx,\ \sin kx$, так как сумма такого ряда имеет период 2π. Но можно раскладывать и такие функции в ряд по обобщённым тригонометрическим функциям. Для решения этого вопроса предположим, что функция имеет период 2l. Тогда функция $f\left(\dfrac{l}{\pi}x\right)$ имеет уже период 2π. Её можно разложить в ряд Фурье

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

где $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x\right)\cos n\,dx,\ n=0,1,2,\ldots,\quad b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x\right)\sin n\,dx,\ n=1,2,\ldots$

Положив $y = \dfrac{l}{\pi}x$, получим

$$x = \frac{\pi}{l}y, \quad dx = \frac{\pi}{l}dy, \text{ и } f\left(y\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}y + b_n \sin\frac{\pi n}{l}y\right),$$

где $a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(y)\cos\frac{n\pi}{l}y\,dy,\ n=0,1,2,\ldots,\quad b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(y)\sin\frac{n\pi}{l}y\,dy,\ n=1,2,\ldots$

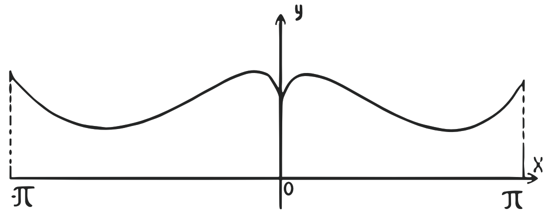
Таким образом, мы нашли способ представления функций обобщёнными рядами Фурье. Понятно, что все результаты, относящиеся к сходимости рядов Фурье, переносятся и на обобщённые ряды Фурье.

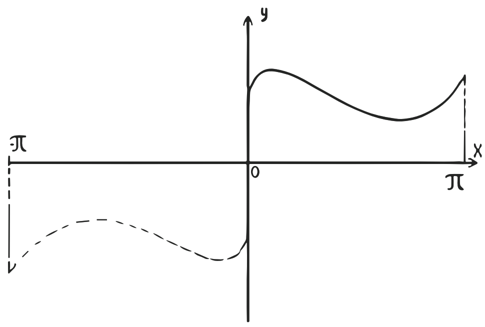
10.7 Разложения только по косинусам или только по синусам

Предположим, что функция $f(x)$ задана лишь на отрезке $[0,\pi]$. Желая разложить её на этом отрезке в ряд Фурье, мы дополним определение этой функции в промежутке $[-\pi,0)$ по произволу.

Утверждение. Можно использовать произвол в определении функции $f(x)$ в промежутке $[-\pi,0)$ так, чтобы получить для $f(x)$ разложение только по косинусам или только по синусам.

Доказательство. Представим себе, что для $0 < x \le \pi$ мы полагаем $f(-x) = f(x)$, так что в результате получится чётная функция на отрезке $[-\pi, \pi]$, к тому же имеющая период 2π. Её разло-





жение будет содержать только косинусы. Аналогично, если дополнить определение функции $f(x)$ для $0 < x \le \pi$ условием $f(-x) = -f(x)$ так, чтобы она оказалась нечётной, то в её разложении будут участвовать только члены с синусами. $\square$

11 Билет 11. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющими переменными. Однородные уравнения. Простейшие дифференциальные уравнения химической кинетики. Уравнение вида: $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$

11.1 Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение $y' = f(x, y)$. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши (без док-ва)

Определение 11.1. *Дифференциальным уравнением называется уравнение вида $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$, где $F(t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+1})$ — функция, определенная в некоторой области D пространства $\mathbb{R}^{n+2}$, x — независимая переменная, y — функция от x; $y', \dots, y^{(n)}$ — ее производные.*

Определение 11.2. *Порядком уравнения называется наивысший из порядков производных y, входящих в уравнение. Функция $f(x)$ называется* ***решением*** *уравнения на промежутке (a, b), если для всех x из (a, b), выполняется равенство: $F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$.* ***Интегральная кривая*** *— это график решения.*

Пример 1. Решить уравнение $y' = 0$. Его решение: $f(x) = Const$, определено на $(-\infty; +\infty)$. Отметим, что эта постоянная — произвольная и решение не единственное, а имеется бесконечное множество решений.

Пример 2. Решить уравнение $y' = \varphi(x)$, $x \in (a; b)$, где $\varphi(x)$ - непрерывная на $(a; b)$ функция. Пусть $F(x)$ первообразная для $\varphi(x)$. Тогда уравнение имеет бесконечное множество решений на $(a; b)$ и все они имеют вид $y = f(x) = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная. Есть прямой способ выбрать какое-то одно из этих

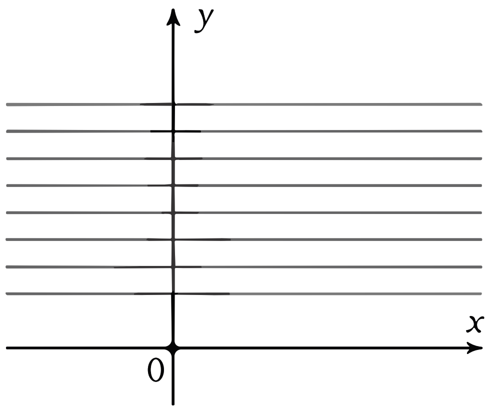


Рис. 1: Решения уравнения $y' = 0$

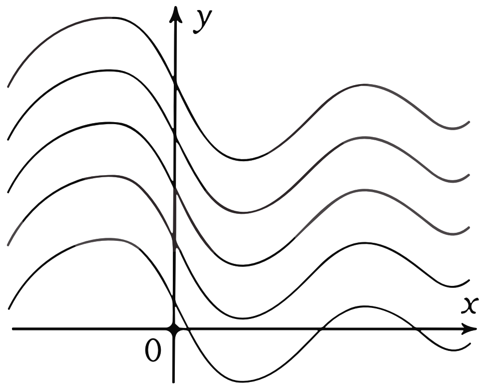


Рис. 2: Решения уравнения $y' = \varphi(x)$

решений, потребовав, например, чтобы для некоторой точки $x_0 \in (a; b)$ выполнялось условие $y(x_0) = y_0$. Тогда, подставив x_0 в решение, получаем условие $y_0 = F(x_0) + C$, определяющее $C = y_0 - F(x_0)$ и, тем самым, единственное решение $y = f(x)$ с указанным условием.

Рассмотрим значительно более общую ситуацию, чем была в примерах. Пусть исследуемое уравнение имеет вид: $y' = f(x, y)$. Это уравнение первого порядка, разрешенное относительно y'. (Термин «разрешенное» означает, что y' выражается через остальные величины, в отличие от уравнения общего вила $F(x, y, y') = 0$, из которого выразить y', может быть и не удастся). Сформулируем важнейшую теорему.

Теорема 11.1 (О существовании и единственности решения задачи Коши)**. Пусть** $f(t_1, t_2)$ **— непрерывная функция в области** $D \in \mathbb{R}^2$**, причем** $\dfrac{\partial f}{\partial t_2}(t_1, t_2)$ **— также непрерывен в** D**. Тогда для любой точки** $(x_0, y_0) \in D$ **задача Коши:**

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y\,(x_0) = y_0 \end{cases}$$

имеет решение, причем единственное в том смысле, что если есть два ее решения y_1 **и** y_2**, определенные на интервалах** $(a_1; b_1)$ **и** $(a_2; b_2)$**, содержащих точку** x_0**, то они совпадают на пересечении** $(a; b)$ **этих интервалов.**

Теорему оставим пока *без доказательства.*

Замечание. Говорят, что решение $y_1(x)$ дифференциального уравнения на интервале $(a_1; b_1)$ — есть **продолжение решения** $y_2(x)$ на $(a_2; b_2)$, если $(a_2; b_2) \in (a_1; b_1)$ и $y_1(x) \equiv y_2(x)$ на $(a_2; b_2)$. Также говорят, что решение $y(x)$ — **максимальное** или **непродолжаемое** относительно D, если $y(x)$ не обладает продолжениями, целиком лежащими в D.

На основании этого замечания можно сказать, что при условиях теоремы существует единственное максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши.

Геометрический смысл сформулированной теоремы состоит в следующем. Левая часть уравнения $y' = f(x, y)$ представляет собой y' - тангенс угла наклона касательной к графику искомой функции в точке (x, y), а правая часть $f(x, y)$ задает его численное значение $f(x, y)$ в этой точке. Поэтому можно считать, что уравнение задает поле направлений на области D, т.е. к каждой точке $(x, y) \in D$ прикреплен вектор, указывающий направление касательной к искомой интегральной кривой.

Поэтому сформулированная выше теорема означает, что при выполнении ее условий через каждую точку $(x, y) \in D$ проходит единственная непродолжаемая интегральная кривая. Перейдем к простейшим типам дифференциальных уравнений, для которых можно в явном виде получить их решения.

11.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 11.3. *Уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида* $y' = f(x) \cdot g(y)$, *где* $f(x)$ *- непрерывна на некотором* $(a; b)$, *а* $g(y)$ *непрерывна на* $(c; d)$, *причем* $g(y) \neq 0$ *на* $(c; d)$.

Поскольку,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$$

то интегрируя обе части последнего равенства, $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. Обозначая $G(y)$ любую первообразную для $\dfrac{1}{g(y)}$, а $F(x)$ - любую первообразную для $f(x)$, перепи-

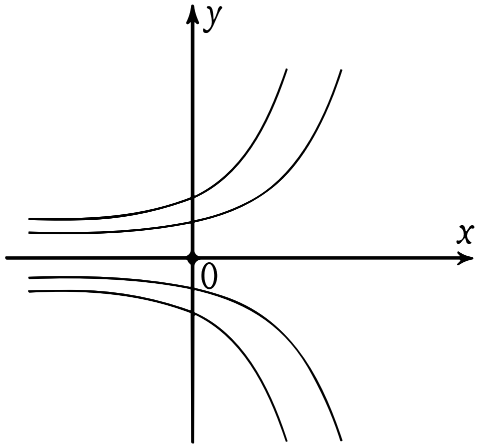


Рис. 3: К примеру 3

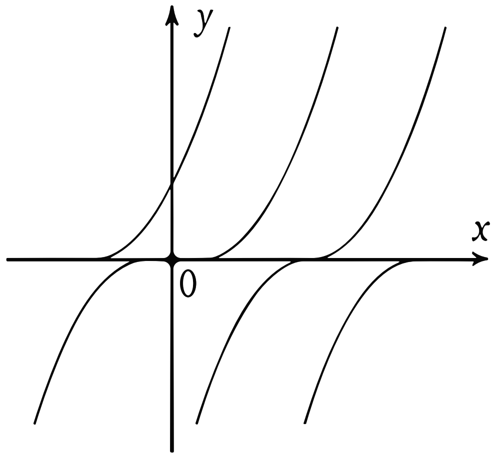


Рис. 4: К примеру 4

шем это уравнение в виде $G(y) = F(x) + C$. Это — искомая интегральная кривая. Рассмотрим некоторые примеры таких уравнений.

Пример 3. Рассмотрим уравнение $y' = ay,\ a \neq 0$. Очевидно решение $y = 0$. Если же $y \neq 0$ то уравнение можно заменить таким: $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int a\,dx$, откуда $\ln|y| = ax + C$. Если считать, что $y > 0$, то $\ln|y| = x + C$, откуда $y = e^C e^{ax}$ или $y = ke^{ax},\ k = \ e^C > 0$. Аналогично, при $y < 0$ получаем $y = k_1 e^{ax},\ k_1 < 0$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение $y' = 2\sqrt{|y|}$. Очевидно решение — $y(x) \equiv 0$. При $y > 0$ имеем:

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx \Leftrightarrow \sqrt{y} = x - C,$$

Откуда при $x > 0$ находим: $y = (x - C)^2$ и $x \geq C$. Аналогично, при $y < 0,\ x < 0$ находим: $y = -(x - C)^2,\ \ x \leq C$.

В точках $(C, 0)$ единственность решения нарушается. Отметим, что это не противоречит теореме о единственности: $f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$ и функция $\dfrac{df}{dy} = \dfrac{y}{|y|^{3/2}}$ — не является непрерывной в нуле.

11.3 Тримолекулярная реакция

Исследуем математическую модель тримолекулярной реакции, в каждом элементарном акте которой участвуют 3 молекулы или атома. Например, рассмотрим реакцию

$$2NO + O_2 \to 2NO_2$$

В результате взаимодействия двух молекул, первого вещества и одной второго, получаем две молекулы третьего вещества. Пусть $y_1(t) = [NO]$, т.е. концентрация вещества NO в момент t, $y_2(t) = [O_2]$, тогда по закону действующих масс [1]

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2ky_1^2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -ky_1^2y_2 \end{cases} \Rightarrow dy_1 = 2dy_2 \Rightarrow y_2 = \frac{y_1 - C}{2}$$

[1] Закон действующих масс, один из основных законов физической химии: устанавливает зависимость скорости химической реакции от концентраций реагирующих веществ и соотношение между концентрациями (или активностями) продуктов реакции и исходных веществ в состоянии химического равновесия. Норвежские учёные К. Гульдберг и П. Вааге, сформулировавшие закон действующих масс в 1864-67, назвали «действующей массой» вещества его количество в единице объёма, т. е. концентрацию, отсюда наименование закона. Если в идеальной газовой смеси или идеальном жидком растворе происходит реакция:

$$aA + a'A' \rightleftharpoons bB + b'B'$$

(A, A' и т.д. - вещества, a, a' и т.д. - стехиометрические коэффициенты), то, согласно закону действующих масс, скорость реакции в прямом направлении:

$$v_+ = k_+ [A]^a [A']^{a'}$$

Здесь $[A]$ концентрация вещества A и т.д. k_+ — константа скорости реакции (в прямом направлении), v_+ зависит от температуры, а в случае жидкого раствора - также и от давления; последняя зависимость существенна лишь при высоких давлениях. Вид уравнения для скорости реакции в прямом направлении определяется тем, что необходимым условием элементарного акта реакции является столкновение молекул исходных веществ, т. е. их встреча в некотором малом объеме (порядка размера молекул). Вероятность найти в данный момент в данном малом объёме молекулу A пропорциональна $[A]$; вероятность найти в нём одновременно a молекул A и a' молекул A' по теореме о вероятности сложного события пропорциональна $[A]^a \cdot [A']^{a'}$. Число столкновений молекул исходных веществ в единичном объёме за единичное время пропорционально этой величине. Скорость реакции в обратном направлении выполняется по формуле:

$$v_- = k_- [B]^b [B']^{b'}$$

Если реакция обратима, т.е. протекает одновременно в противоположных направлениях, то наблюдаемая скорость реакции — $v = v_+ - v_-$. При $v_+ = v_-$ осуществляется химическое равновесие. Тогда согласно исходному уравнению

$$\frac{[B]^b [B']^{b'}}{[A]^a [A']^{a'}} = K,$$

где $K = k_+/k_-$ – константа равновесия.

где k — константа скорости. Найдём y_1:

$$y_1' = -ky_1^2\,(y_1 - C) \Rightarrow -\frac{1}{y_1^2}\frac{dy_1}{dt} = k(y_1 - C) \Rightarrow d\left(\frac{1}{y_1}\right) = k\left(\frac{1}{1/y_1} - C\right)dt$$

Обозначим $z = \dfrac{1}{y_1}$, тогда

$$\frac{z\,dz}{1 - zC} = kdt \Rightarrow kt = \int \frac{z\,dz}{1 - zC} = \frac{1}{C}\int \frac{Cz - 1 + 1}{1 - zC}\,dz = -\frac{z}{C} - \frac{1}{C^2}\ln|1 - zC| + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\,(z) = \frac{C_1}{k} - \frac{z}{kC} - \frac{1}{C^2k}\ln|1 - zC|$$

11.4 Однородные уравнения

Определение 11.4. *Под* ***однородными уравнениями*** *понимаются уравнения вида* $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$*. Для их решения требуется сделать замену* $y = tx$*, после чего получится уравнение с разделяющимися переменными.*

Пример 5. Решить уравнение $x\,dy = (x + y)\,dx$.

Оно имеет решение $x \equiv 0$. Пусть теперь $x \neq 0$. Преобразуем уравнение так: $y' = \dfrac{x + y}{x}$ (правая часть имеет вид $1 + \dfrac{y}{x}$ — это однородное уравнение). Полагаем $y = tx$. При этом $y' = t' \cdot x + t$ и получаем уравнение $t'x + t = 1 + t$, $t'x = 1$, $t' = \dfrac{1}{x}$, $t = \ln|x| + C$. Значит, $y = x\ln|x| + Cx$.

Ответ: $x = 0,\ y = x\ln x + Cx$.

11.5 Уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$

Такие уравнения сводятся к однородным заменой переменных. В случае, если прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $ax + by + c = 0$ пересекаются в точке $(x_0,\ y_0)$, то замена $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$ приведет уравнение к однородному. Если же эти прямые не пересекаются, то $a_1x + b_1y = k(ax + by)$ и замена $z = ax + by$ приведет к уравнению с разделяющимися переменными.

12 Билет 12. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Уравнение Бернулли

12.1 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Определение 12.1. ***Линейным уравнением первого порядка*** *называется уравнение вида*

$$\alpha(x)\,y' + \beta(x)\,y + \gamma(x) = 0$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x) \in C(a,b)$, (a,b) *– заданный интервал.*

Обычно считают, что $\alpha(x) \neq 0$, и тогда линейное уравнение принимает вид

$$y' + p(x)\,y = q(x), \tag{12.1}$$

где $p(x)$, $q(x) \in C(a,b)$. Если $q(x) \equiv 0$, то (12.1) – линейное **однородное** уравнение, в противном случае оно называется **неоднородным**.

Решим однородное уравнение

$$y' + p(x)\,y = 0 \tag{12.2}$$

Очевидно, что $y \equiv 0$ – решение (12.2). Линейное уравнение удовлетворяет на (a,b) всем условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, поэтому какое-то другое решение (12.2), отличное от тождественного нуля, не обращается в 0 ни в одной точке на (a,b).

Итак, считаем, что $y \neq 0$.

$$y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow y' = -p(x)\,y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)\,dx,$$

откуда, обозначая $P(x)$ любую первообразную для функции $-p(x)$, находим в случае

$y > 0$, $\ln(y) = P(x) + \ln C$, $C > 0$, или $y = Ce^{P(x)}$. В случае $y < 0 : -y = Ce^{P(x)}$, $y = -Ce^{P(x)}$, $C > 0$. Осталось заметить, что формула $y = Ce^{P(x)}$ и при $C = 0$ дает решение уравнения (12.2). Таким образом, $y = Ce^{P(x)}$ – решение уравнения (12.2) при всех C, и любое решение (12.2) имеет такой вид при соответствующей постоянной C.

Далее используем **метод вариации постоянных**: ищем решение неоднородного уравнения в виде $y = C(x)e^{P(x)}$. При этом

$$y' = C'(x)e^{P(x)} + C(x)e^{P(x)} \cdot P'(x) = C'(x)e^{P(x)} - C(x)p(x) \cdot e^{P(x)}$$

Подстановка в уравнение дает

$$C'(x)\, e^{P(x)} - C(x)\, p(x) \cdot e^{P(x)} + C(x)\, p(x) \cdot e^{P(x)} = q(x), \text{ или } C'(x) = q(x)\, e^{-P(x)}.$$

Интегрируем и, обозначая $Q(x)$ первообразную для $q(x)e^{-P(x)}$, получаем $C(x) = Q(x) + C_1$. Тогда $y = (Q(x) + C_1)\, e^{P(x)}$.

Эту формулу иногда записывают в виде

$$y = \left(\int q(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}\, dx + C_1 \right) e^{\int p(x)\, dx},$$

понимая под знаком интеграла не все множество первообразных, а одну произвольно выбранную первообразную.

Разберем пример:

Пример 1. Решить уравнение $y' = x + y$. Решим сначала вспомогательное уравнение $y' = y$. Это уже знакомое уравнение с разделяющимися переменными, имеющее решение $y = Ce^x$. Для нахождения решения исходного уравнения используем **метод вариации постоянной**. Ищем решения нашего уравнения в виде $y = C(x)\, e^x$, где $C(x)$ – некоторая дифференцируемая функция. Тогда $y' = C'(x) \cdot e^x + C(x)\, e^x$ и, подставляя в уравнение, получаем:

$$C'(x) \cdot e^x + C(x)\, e^x = x + C(x)\, e^x \Leftrightarrow C'(x) \cdot e^x = x \Leftrightarrow C'(x) = x \cdot e^{-x}$$

Интегрируя, находим:

$$C(x) = x \cdot e^{-x} dx = \frac{-x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + C_1$$

Тогда $y = \left(\frac{-x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + C_1\right) \cdot e^x = -x - 1 + C_1\, e^x$ Итак, мы нашли решение исходного уравнения. Других решений y него нет, поскольку выполнены все условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши ($x + y$ — непрерывная функция а ее производная по y, равная 1, тоже).

Ответ: $y = -x - 1 + C_1\, e^x$.

12.2 Уравнение Бернулли (и Риккати)

Уравнения вида $y' + a(x)\, y = b(x)\, y^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ называются **уравнениями Бернулли**.

Для $\alpha = 1$ решение сводится к только что разобранному случаю. В случае $\alpha \neq 1$ при делении на y^α получаем:

$$y^{-\alpha} y' + a(x) z(x) = b(x)$$

здесь мы сделали замену $z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$. Заметим, что при делении на y^α мы должны не забыть учесть решение $y = 0$ для $\alpha > 0$: $\frac{z'}{1-\alpha} + a(x) z(x) = b(x)$. Полученное уравнение – линейное уравнение первого порядка, которое мы решаем, например, методом вариации постоянных. По найденному $z(x)$ мы выписываем решение y.

Пример 2. Решим уравнение Бернулли $(1 + x^2) y' = xy + x^2 y^2$

$$(1 + x^2)\, y' = xy + x^2 y^2 \Leftrightarrow \frac{(1 + x^2)\, y'}{y^2} = x \left(\frac{1}{y}\right) + x^2,\ y = 0 \Leftrightarrow -(1 + x^2)\, z' = xz + x^2,$$

здесь мы сделали замену $z = \frac{1}{y}$ и при делении на y мы учли решение $y = 0$. Теперь, решая уравнение $-(1 + x^2)\, z' = xz + x^2$ как линейное однородное, получаем:

$$\ln z = -\frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + \ln C \Leftrightarrow z = C(1 + x^2)^{-1/2}.$$

Далее, ищем решение исходного неоднородного уравнения в виде: $z = C(x)\sqrt{1+x^2}$

$$-(1+x^2)z' = xz + x^2 \Leftrightarrow -C'(x)\sqrt{1+x^2} = x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow C(x) = -\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{((1+x^2)-1)\,dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= -\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C =$$
$$= -\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

Поэтому $z = \left(-\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, и замена $\frac{1}{y} = z$ приводит к ответу.

Необязательный материал. Уравнения вида $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$ называются **уравнениями Риккати**. В общем случае уравнения Риккати не решаются в квадратурах, однако, если удаётся отыскать частное решение y_1 то заменой $y = z + y_1$ мы сводим уравнение Риккати к уравнению Бернулли. Частное решение ищем исходя из правой части уравнения. Например, в случае $c(x) = c_{2n}x^{2n} + c_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + c_0$ ищем его в виде $d_n x^n + d_{n-1}x^{2n-1} + \dots + d_0$; в случае $c(x) = c_{2n}e^{2nx} + c_{2n-1}e^{(2n-1)x} + \dots + c_0$ ищем в виде $d_n e^{nx} + d_{n-1}e^{(n-1)x} + \dots + d_0$; в случае $c(x) = \frac{c}{x^{2n}}$ ищем в виде $\frac{d}{x^n}$ и т.д.

Пример 3. Решим уравнение Риккати $(1+x^2)y' - (x+2x^2)y - x^2y^2 = x + x^2$.

Исходя из вида правой части, будем искать частое решение в виде $y = ax + b$. Подставив эту функцию в исходное уравнение, получаем:

$$(1+x^2)a - (x+2x^2)(ax+b) - x^2(a^2x^2 + 2abx + b^2) = x + x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -a^2x^4 - 2a(b+1)x^3 - (b^2+2b+1)x^2 - (b+1)x + a = 0$$

Приравняем к нулю все коэффициенты при степенях x, откуда находим значения $a = 0$, $b = -1$, т.е. частное решение $y_1 = -1$. Сделаем замену переменного $y = z - 1$:

$$(1+x^2)z' - (x+2x^2)(z-1) - x^2(z-1)^2 = x + x^2 \;\Leftrightarrow\; (1+x^2)z' - xz - x^2z^2 = 0.$$

Получено уравнение Бернулли, которое решено выше.

Ответ: $y = -1 + \sqrt{1+x^2}\cdot\left(C - \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)^{-1}$, $y = -1$.

13 Билет 13. Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Уравнение Лагранжа, уравнение Клеро

13.1 Уравнения в полных дифференциалах

Пусть левая часть дифференциального уравнения

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{13.1}$$

является полным дифференциалом некоторой функции $z = z(x, y)$, т.е.:

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = dz \tag{13.2}$$

Как будет известно в 4 семестре, необходимым и достаточным условием этого служит выполнение тождества:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{13.3}$$

В этом случае уравнение (13.1) называется уравнением в полных дифференциалах и решается следующим образом: в точках интегральной кривой одну из переменных x и y можно рассматривать как функцию другой [2]. Предполагая для определенности, что y есть функция от x, уравнение (13.1), в силу формулы (13.2), можно записать в виде равенства:

$$dz(x, y) = 0$$

где $z(x, y)$ - рассматриваемая как сложная функция от x, или:

$$\frac{dz(x, y)}{dx} = 0$$

[2]Исключение составляют лишь точки (x, y), где выполнено условие $P(x, y) = Q(x, y) = 0$. Такие точки называются особыми для дифференциального уравнения (13.1)

Отсюда получаем общий интеграл уравнения (13.1):

$$z(x, y) = C, \tag{13.4}$$

где C – произвольная постоянная. Геометрически общий интеграл (13.4) представляет собой семейство линий уровня поверхности $z = z(x, y)$.

Если выполнено условие полного дифференциала (13.3), то для нахождения функции z можно поступить следующим образом: из уравнения (13.2) имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y) \tag{13.5}$$

Отсюда, интегрируя первое равенство формулы (13.5), получим:

$$z = \int P(x, y)\, dx + \varphi(y), \tag{13.6}$$

где $\varphi(y)$ - некоторая функция от y.

Используя второе равенство формулы (13.5), будем иметь:

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial(\int P(x, y)\, dx)}{\partial y} \equiv R(x, y)$$

При наличии равенства (13.3) функция $R(x, y)$ не зависит от x, так как

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(\int P(x, y)\, dx)}{\partial y}\right] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial(\int P(x, y)\, dx)}{\partial x}\right] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$$

Поэтому $R(x, y) \equiv R(y)$. Последнее обстоятельство может служить контролем правильности выкладок. Следовательно,

$$\varphi'(y) = R(y) \text{ и } \varphi(y) = \int R(y)\, dy + C_1$$

Из формулы (13.6) окончательно имеем

$$z = \int P(x, y)\, dx + \int R(y)\, dy + C_1$$

В последней формуле произвольная постоянная C_1 может быть пропущена, так как для получения общего интеграла (13.4) нам нужна одна функция z, удовлетворяющая уравнению (13.2).

Пример 1. Решить уравнение

$$(2x - y)\,dx - (x - 2y)\,dy = 0. \tag{13.7}$$

Решение. Здесь $P = 2x - y$, $Q = -(x - 2y)$, причем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

и, следовательно, левая часть уравнения (13.7) является полным дифференциалом некоторой функции z, т.е.

$$(2x - y)dx - (x - 2y)dy = dz$$

На основании последней формулы имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -(x - 2y) \tag{13.8}$$

Интегрируя первое из равенств (13.8), находим

$$z = \int (2x - y)\,dx + \varphi(y) = x^2 - xy + \varphi(y)$$

Используя второе из равенств (13.8), будем иметь

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -(x - 2y) = -x + \varphi'(y)$$

Отсюда находим $\varphi'(y) = 2y$ и $\varphi(y) = y^2 + C_1$

Следовательно,

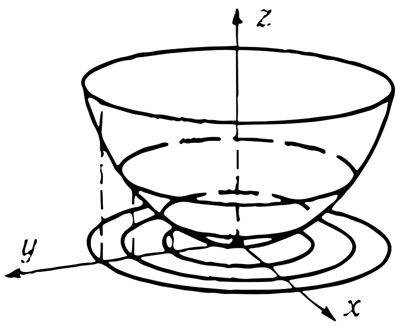
$$z = x^2 - xy + y^2 + C_1$$

Полагая $y = y(x)$, уравнение (13.7) можно записать в виде $dz(x, y) = 0$

Отсюда, приняв для простоты $C_1 = 0$, получаем общий интеграл этого уравнения

$$x^2 - xy + y^2 = C, \tag{13.9}$$

где C - произвольная постоянная. Геометрически общий интеграл (13.9) есть семейство линий уровней эллиптического параболоида $z = x^2 - xy + y^2$.



13.2 Уравнения, не разрешенные относительно производной

Общее уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$ можно пытаться решать разными методами.

Во-первых, можно попытаться все-таки его решить и свести исходное уравнение к одному или нескольким уравнениям вида $y' = f(x, y)$.

Пример 2. Решить уравнение $(y')^2 - y^2 = 0$.

Уравнение, после преобразования к виду $(y' - y)(y' + y) = 0$ даст равносильную ему совокупность $\left[\begin{array}{l} y' = y \\ y' = -y \end{array}\right.$, откуда $\left[\begin{array}{l} y = Ce^{x} \\ y = Ce^{-x} \end{array}\right.$

Другой способ – **введение параметра**.

Пример 3. Решить уравнение $y = x + y' - \ln y'$. Можно решить так: введем параметр $p = y'$. Тогда $y = x + p - \ln p$, откуда $dy = dx + dp - \dfrac{dp}{p}$. Но $dy = y'dx = pdx$ и мы приходим к уравнению $pdx = dx + dp - \dfrac{dp}{p}$ или $(p-1)dx = \dfrac{p-1}{p}dp$.

При $p \neq 1$ из этого уравнения получаем $dx = \dfrac{dp}{p}$, $x = \ln p + C$.

Тогда $y = x + p - \ln p = \ln p + C + p - \ln p = p + C$ и мы получаем параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = \ln p + C \\ y = p + C \end{cases}$$

В этом случае параметр p удается исключить: $\ln p = x - C$, $p = e^{x-C}$) и $y = e^{x-C} + C$ — явное решение. В случае $p = 1$ из $y = x + p - \ln p$ получаем $y = x + 1$.

Ответ: $y = e^{x-C} + C$, $y = x + 1$. Указанный прием применим к уравнениям Лагранжа и Клеро.

Уравнение Лагранжа имеет вид: $y = \varphi(y')x + \psi(y')$, где $\varphi(p)$, $\psi(p)$ - дифференцируемые функции. Полагая $y' = p$, получаем $y = \varphi(p)x + \psi(p)$. Дифференцируя, получаем:

$$dy = x\varphi'(p)dp + \varphi(p)dx + \psi'(p)dp \Longleftrightarrow pdx = x\varphi'(p)dp + \varphi(p)dx + \psi'(p)dp \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\varphi(p) - p)dx + x\varphi'(p)dp = -\psi'(p)dp$$

Предполагая, что $\varphi(p) \neq p$, получаем уравнение:

$$dx + x\,\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\,dp = -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}\,dp$$

линейное относительно x:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} \cdot x = -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}$$

Решаем его указанным выше методом и получаем выражение для x через p и произвольную постоянную C, $x = x(p, C)$. Тогда $y = \varphi(p)\,x(p, C) + \psi(p)$.

Уравнение Клеро – частный случай уравнения Лагранжа: $y = xy' + \psi(y')$. Вводя параметр $y' = p$, получаем $y = xp + \psi(p)$ (т.е. $\varphi(p) = p$, как раз оставшийся случай),

$$dy = pdx = xdp + pdx + \psi'(p)dp \Longleftrightarrow (\psi'(p) + x)dp = 0$$

Тогда, если $dp = 0$, то $p = C$ и $y = Cx + \psi(C)$ - это общее решение уравнения Клеро.

Если же $\psi'(p) + x = 0$, то обозначим решение этого уравнения $p = \omega(x)$. Тогда $y = x\omega(x) + \psi(\omega(x))$.

13.3 Интегрирующий множитель линейного уравнения

Необязательный на экзамене пункт, дающий представление о том, что такое **интегрирующий множитель**. Рассмотрим линейное уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ или

$$dy + p(x)y\,dx = q(x)dx$$

Общим интегрирующим множителем для левой и правой частей уравнения, как легко непосредственно проверить, является функция $\mu = e^{\int p(x)dx)}$. В самом деле, умножая (10) на μ, очевидно, имеем

$$e^{\int p(x)dx}dy + p(x)e^{\int p(x)dx}y\,dx = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

отсюда

$$d(ye^{\int p(x)dx}) = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

следовательно,

$$ye^{\int p(x)dx} = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

где C - произвольная постоянная. Это наиболее практичный способ решения линейного уравнения.

Пример. Решить уравнение $y' - ay = f(x)$, где a - постоянная величина.

Решение. Здесь $\mu = e^{-\int a dx} = e^{-ax}$ или $d(ye^{-ax}) = e^{-ax}f(x)dx$.

Отсюда:

$$ye^{-ax} = C + \int e^{-ax}f(x)dx \quad \text{и} \quad y = e^{ax}\left[C + \int e^{-ax}f(x)dx\right]$$

.

14 Билет 14. Дифференциальные уравнения n – го порядка. Понижение порядка дифференциального уравнения

14.1 Дифференциальные уравнения n – го порядка. Задача Коши для уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно n-ой производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{14.1}$$

Теорема 14.1. Пусть $x_0, y_0, y_0', \ldots, {y_0}^{(n-1)}$ – некоторый заданный набор чисел. Пусть функция от $n+1$ переменных $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ обладает следующими свойствами: она непрерывна на совокупности переменных в области

$$|x - x_0| \leq \delta_0, \quad |y - y_0| \leq \varepsilon_0, \quad |y' - y_0'| \leq \varepsilon_1, \quad \ldots, \quad \left|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right| \leq \varepsilon_{n-1} \tag{14.2}$$

и пусть частные производные f по аргументам $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ ограничены (это, в частности, выполнено, если эти частные производные непрерывны в рассматриваемой области). Тогда существует такое число $\delta > 0$ и такая функция $y = \varphi(x)$, определенная в интервале $|x - x_0| \leq \delta$, что

$$\varphi^{(n)}(x) = f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right) \tag{14.3}$$

для всех x из этого интервала, причем

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{14.4}$$

Без доказательства.

Полученное решение $\varphi(x)$ зависит от заданных чисел $y_0, y_0', \ldots, {y_0}^{(n-1)}$. Если считать эти числа изменяющимися параметрами и обозначить $C_0, \ldots, C_{n-1}$, то решение

$y = \varphi(x)$ уравнения (14.1), соответствующее такому выбору параметров обозначим $\varphi(x, C_0, ..., C_{n-1})$ и назовём ***общим решением***.

При фиксированных значениях (14.4) получаем ***частное решение***, или ***решение задачи Коши с начальными условиями*** (14.4). График этого частного решения – ***интегральная кривая***.

Приведём пример решения задачи Коши для уравнения

$$y''' = 1 \tag{14.5}$$

с начальными условиями $y\,(0) = 1,\ y'\,(0) = 2,\ y''\,(0) = 3$.

Здесь функция f тождественно равна 1 и все условия теоремы выполнены в любой точке x_0, y_0, y'_0, y''_0. Проинтегрировав уравнение 1 раз, получаем

$$y'' = x + C_0 \tag{14.6}$$

после следующего интегрирования имеем

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_0 x + C_1 \tag{14.7}$$

Наконец,

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{C_0 x^2}{2} + C_1 x + C_2 \tag{14.8}$$

Зададим точку:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ y'_0 = 2,\ y''_0 = 3 \tag{14.9}$$

Тогда, подставляя в (14.8) $x_0 = 0$ находим: $y_0 = 1 = C_2$. Подставив $x_0 = 0$ в (14.7), получаем $y'_0 = 2 = C_1$, наконец, из (14.6) получаем $C_0 = 3$. Итак, искомое решение с заданными начальными условиями (14.9) имеет вид $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^2}{2} + 2x + 1$. Отметим, что уравнение (14.5) удовлетворяет всем условиям сформулированной теоремы, поэтому любое его решение получается по формуле (14.8) при подходящем выборе чисел C_0, C_1, C_2.

14.2 Понижение порядка дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение n-го порядка общего вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{14.10}$$

в некоторых случаях может быть сведено к уравнению меньшего порядка.

Случай 1. Уравнение (14.10) не содержит x, т.е. имеет вид

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{14.11}$$

Примем y за независимую переменную, а $y' = p(y)$ – за новую неизвестную функцию. Тогда, по правилу дифференцирования сложной функции,

$$y'' = \frac{d\,(y'_x)}{dx} = \frac{d\,p(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p \tag{14.12}$$

и, согласно (14.12),

$$y''' = \frac{d\,(y''_{xx})}{dx} = \frac{d\,(p'_y\,p)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dy}\left(p \cdot \frac{dp}{dy}\right)\right) \cdot p = \left(p \cdot \frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right) \cdot p \tag{14.13}$$

и т.д.

Пример. Решите задачу Коши:

$$y'y''' = 2(y')^3 + (y'')^2, \tag{14.14}$$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$

Полагаем $y' = p$, тогда $y'' = p\,\dfrac{dp}{dy}$, $y''' = \left(p\,\dfrac{d^2p}{dy^2} + \left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2\right)p$ согласно (14.12) и (14.13), откуда

$$p\left(p^2\,\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right) = 2p^3 + \left(p\,\frac{dp}{dy}\right)^2$$

$$p^3\,\frac{d^2p}{dy^2} + p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 2p^3 + p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

$$p^3\left(\frac{d^2p}{dy^2}-2\right)=0$$

Либо $p=0$, либо

$$\frac{d^2p}{dy^2}-2=0. \tag{14.15}$$

В первом случае $y'=0$, $y=C$ – очевидно, решение исходного уравнения, однако не дающее решения задачи Коши (14.14). Интегрируя по y обе части уравнения (14.15), получаем

$$\frac{dp}{dy}=2y+C_0$$

$$p=y^2+C_0y+C_1 \tag{14.16}$$

Из начальных условий при $x=0,\ p=y'=1$, а $y=0$, поэтому $1=0+0+C_1$,

$C_1=1$, а так как по (14.12), $y''=p\,\dfrac{dp}{dy}=p\,(2y+C_0)$, при $x=0$ имеем ввиду того, что $y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0$: $0=1(2\cdot 0+C_0)\ \Rightarrow C_0=0$.

Следовательно, (14.16) принимает вид

$$p=\frac{dy}{dx}=y^2+1,$$

$$\frac{dy}{y^2+1}=dx,\ \operatorname{arctg} y=x+C_2$$

при $x=0$, ввиду (14.14), $y=0$, откуда $0=0+C_2\ \Rightarrow C_2=0$.

В итоге получаем: $y=\operatorname{tg} x$.

Случай 2. Левая часть (14.10) не содержит y, т.е.

$$F(x,y',\ldots,y^{(n)})=0$$

Полагаем $y'=p(x),\ y''=p',\ \ldots,\ y^{(n)}=p^{(n-1)}$ и получаем уравнение порядка $n-1$

$$F(x,p,p',\ldots,p^{(n-1)})=0$$

Если же вместе с y отсутствуют и $y', \dots, y^{(k-1)},\ k < n$, т.е. если

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

то замена $z = y^{(k)}$ даёт уравнение порядка $n - k$:

$$F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

Пример: $xy'' - y' = 1$

Положим $y' = p,\ y'' = p'$. Тогда

$$xp' = p + 1, \quad \frac{dp}{p+1} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|p+1| = \ln C + \ln|x|,$$

считая, что $p > 0,\ x > 0$, получаем в этой области

$$p + 1 = Cx, \quad \frac{dy}{dx} = -1 + Cx, \quad \text{откуда } y = -x + \frac{Cx^2}{2} + C_0.$$

Случай 3. (На экзамене необязательно!)

Уравнение (14.10) – однородное по $y, y', \dots, y^{(n)}$, т.е. для любого k:

$$F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^a F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) \tag{14.17}$$

где a – показатель однородности.

Положим $y = e^{\int u\,dx}$, где u – новая неизвестная функция, а под $\displaystyle\int u\,dx$ понимаем произвольную первообразную.

Последовательно находим:

$$y' = y \cdot u,\ y'' = (y \cdot u)' = y'u + yu' = y(u' + u^2) \text{ и т.д.} \tag{14.18}$$

Подставляя в уравнение (14.10) и учитывая (14.17), получаем:

$$F\left(x, y, yu, \dots\right) = 0$$

$$y^a F\left(x, 1, u, \dots\right) = 0$$

что приводит к дифференциальному уравнению

$$F\left(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}\right) = 0$$

Пример: $xyy'' - x(y')^2 = yy'$ показатель a однородности по y, y', y'' равен 2, полагаем $y = e^{\int u\,dx}$ и используем формулы (14.18):

$$xy^2(u' + u^2) - xy^2u^2 = y^2u \text{ или, при } y \neq 0 \text{ (а } y = 0, \text{ очевидно, решение),}$$

$$xu' = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \Rightarrow u = Cx,$$

$$y = e^{\int Cxdx} = e^{C_1x^2 + \ln C_2} = C_2e^{C_1x^2},$$

где $C_1,\ C_2 > 0$ – произвольные постоянные.

Если рассмотреть случай $C_2 = 0$, то формула $y = C_2e^{C_1x^2}$ и решение $y = 0$.

15 Билет 15. Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка. Свойства линейного дифференциального уравнения n-ого порядка

Общий вид линейного дифференциального уравнения n-ого порядка.

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)\, y' + P_0(x)\, y = f(x) \tag{15.1}$$

Функции $P_0(x), \ldots, P_{n-1}(x)$ называются коэффициентами уравнения, $f(x)$ — его свободным членом (или правой частью).

Если $f(x) \equiv 0$, то это уравнение называется *однородным*, его вид:

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)\, y' + P_0(x)\, y = 0 \tag{15.2}$$

Если же $f(x) \neq 0$, то уравнение (15.1) – *неоднородное.*

Предполагается, что все функции $P_0(x), \ldots, P_{n-1}(x)$ и функция $f(x)$ непрерывны на некотором интервале $(a; b)$ (возможно, что $(a; b)$ – бесконечный интервал).

Представляя уравнение (15.1) в виде:

$$y^{(n)} = -P_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} - \cdots - P_1(x)\, y' - P_0(x)\, y + f(x)$$

соответствующем уравнению (14.1) предыдущего билета, обнаруживаем, что частные производные правой части по переменным $y,\ y', \ldots,\ y^{(n-1)}$ равны, соответственно, $-P_0(x) - \cdots - P_{(n-1)}(x)$ и являются непрерывными на $(a; b)$ функциями.

Поэтому, по теореме 11.1 о существовании и единственности решения задачи Коши, для любого набора чисел $x_0 \in (a; b), y_0,\ y_0', \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ существует единственное решение$y = \varphi(x)$ уравнения (15.1) такие, что $\varphi^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)},\ k = 0,\ \ldots,\ n-1$

Можно доказать, что решение $y = \varphi(x)$ определено на всем $(a; b)$.

Уравнения (15.1) и (15.2) мы часто будем записывать в виде $L(y) = f(x)$ и

$L(y) = 0$, соответственно, где использовано обозначение

$$L(y) = y^{(n)} + P_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + P_1(x)\, y' + P_0(x)\, y \tag{15.3}$$

$L(y)$ называется линейным дифференциальным оператором, сопоставляющим n-раз дифференцируемой функции y новую функцию, представляющую собой результат выполнения всех содержащихся в (15.3) действий.

Например, $L(y) = y'' + y, y = e^x,$ то $L(y) = e^x + e^x = 2e^x$.

В случае, если $y = \cos(x)$, получим $L(y) = (-\cos(x)) + \cos(x) = 0$.

Теорема 15.1. Пусть $L(y)$ — линейный дифференциальный оператор (15.3). тогда для любых двух функций $y_1,\ y_2$, имеющих на $(a;b)$ n производных и любых чисел $c_1,\ c_2$ имеем

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2) \tag{15.4}$$

Доказательство. По свойству производной порядка k:

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(k)} = c_1 y_1^{(k)} + c_2 y_2^{(k)} \tag{15.5}$$

Согласно определению (15.3) и используя (15.5), получаем:

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n)} + P_{n-1}(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n-1)} + \dots + P_0(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$
$$= c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + P_{n-1}(x)\left(c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)}\right) + \dots + P_0(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$
$$= c_1\left(y_1^{(n)} + P_{n-1}(x)\, y_1^{(n-1)} + \dots + P_0(x)\, y_1\right) + c_2\left(y_2^{(n)} + P_{n-1}(x)\, y_2^{(n-1)} + \dots + P_0(x)\, y_2\right) =$$

$= c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$. Теорема доказана. □

Следствие. Для любых функций $y_1, \dots,\ y_m$, имеющих на $(a;b)$ n производных и любых чисел $c_1, \dots,\ c_m$ имеем

$$L(c_1 y_1 + \dots + c_m y_m) = c_1 L(y_1) + \dots + c_m L(y_m).$$

Рассмотрим множество решений уравнения $L(y) = 0$.

Теорема 15.2. Множество решений линейного однородного дифференциального уравнения (15.2) **является векторным пространством.**

Доказательство. Достаточно доказать, что если $y_1,\ y_2$ — решения уравнения (15.2), то $y_1 + y_2$ — решение (15.2), и если y — решение, а c — любая постоянная, то cy — решение (15.2). Действительно, если $L(y_1) = 0$ и $L(y_2) = 0$, то, по теореме 15.1, $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0$ и $L(cy) = cL(y) = c \cdot 0 = 0$. $\square$

16 Билет 16. Линейная зависимость функций. Определитель Вронского

Перейдем к более глубокому изучению свойств векторного пространства решений уравнения (15.2). Мы установим ниже, что оно имеет размерность n.

Определение 16.1. *Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – функции, имеющие все производные до $(n-1)$-го порядка включительно. Определителем Вронского $W = W(x)$ функций $y_1, \ldots, y_n$ называется величина*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{16.1}$$

Определение 16.2. *Пусть $y_1, \ldots, y_n$ определены на интервале (a, b). Назовем их* ***линейно зависимыми****, если существуют постоянные $c_1, \ldots, c_n$ не все равные 0, такие, что для всех $x \in (a, b)$*

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = 0 \tag{16.2}$$

Функции, которые не являются линейно зависимыми, называются ***линейно независимыми****. Линейная независимость означает, что из равенства (16.2) следует, что $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.*

Теорема 16.1. Если $y_1, \ldots, y_n$ – линейно зависимы и имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно, то $W(x) \equiv 0,\ x \in (a, b)$.

Доказательство. По определению, существуют не все равные 0 числа c_i такие, что на (a, b) выполняется тождество

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \equiv 0 \tag{16.3}$$

Взяв производную от обеих частей, получим:

$$c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' \equiv 0 \tag{16.4}$$

Аналогично,

$$c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n'' \equiv 0 \tag{16.5}$$

$$c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \tag{16.6}$$

Рассмотрим произвольное $x \in (a; b)$. Равенства (16.3)-(16.6) можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных $c_1, \dots, c_n$. Поскольку эта система имеет нетривиальное решение $c_1, \dots, c_n$ (это означает, не все $c_1, \dots, c_n$ равны 0), ее определитель $W(x)$ должен быть равен 0, т.е. $W(x) \equiv 0, \;\; x \in (a, b)$. $\square$

Обратная теорема в общем случае **неверна**. А это значит, что существуют $y_1(x), \; y_2(x)$ – л.н.з., но $W(x) \equiv 0$. Рассмотрим, например, функции

$$y_1 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

для которых

$$y_1' = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad y_2' = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$

и их определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \begin{cases} x^2 \cdot 0 - 0 \cdot 2x, & x \geq 0 \\ 0 \cdot 2x - x^2 \cdot 0, & x < 0 \end{cases}$$

тождественно равен 0.

Однако если $c_1 y_1 + c_2 y_2 \equiv 0$, то при любом $x > 0$ получаем $c_1 x^2 = 0$, откуда $c_1 = 0$, а при любом $x < 0$ получаем $c_2 x^2 = 0$, откуда $c_2 = 0$. Поэтому функции y_1 и y_2 линейно независимы. Тем не менее, верна следующая важная теорема.

Теорема 16.2. Если $y_1, \dots, y_n$ являются решением уравнения (15.2) и в некоторой точке $x_0 \in (a; b)$ $W(x_0) = 0$, то $y_1, \dots, y_n$ линейно зависимы на (a, b) (и, следовательно, $W(x) \equiv 0,\ x \in (a; b)$).

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно неизвестных $c_1, \dots, c_n$:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{16.7}$$

Ее определитель равен $W(x_0) = 0$ по условию, значит, система (16.7) имеет нетривиальное решение $c_1, \dots, c_n$. Рассмотрим функцию $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \equiv 0$. По теореме 15.2 она является решением уравнения (15.2). Равенства можно рассматривать как условия задачи Коши,

$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{16.8}$$

которая, по теореме 11.1, имеет единственное решение. Вместе с тем, функция $y \equiv 0$ также удовлетворяет уравнению (15.2) и условию (16.8). Ввиду единственности согласно теореме 11.1, $y = Y = 0$. Таким образом, существуют не все равные 0 постоянные $c_1, \dots, c_n$ такие, что $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \equiv 0$. Поэтому $y_1, \dots, y_n$ – линейно зависимы на (a, b). Следовательно, по теореме 16.1, $W(x) \equiv 0$ на (a, b). $\square$

17 Билет 17. Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка

Определение 17.1. *Любые n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) n-го порядка называются фундаментальной системой решений (ФСР) этого уравнения.*

Из предыдущих теорем сразу следует еще одна важная теорема.

Теорема 17.1. Решения $y_1, \ldots, y_n$ уравнения образуют ФСР этого ЛОДУ тогда и только тогда, когда их определитель Вронского $W(x)$ отличен от 0 хотя бы в одной точке $x_0 \in (a; b)$.

Доказательство. Равносильная переформулировка утверждения теоремы – решения $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $W(x) \equiv 0$ на $(a; b)$. Но это утверждение сразу следует из теорем 16.1 и 16.2. □

Теорема 17.2. Для любого ЛОДУ (15.2) существует его ФСР.

Доказательство. Построим такую фундаментальную систему решений, для этого возьмем произвольную точку $x_0 \in (a; b)$ и поставим n различных задач Коши:

$$\begin{array}{cccc} L(y) = 0 & L(y) = 0 & \ldots & L(y) = 0 \\ y(x_0) = 1 & y(x_0) = 0 & \ldots & y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 & y'(x_0) = 1 & \ldots & y'(x_0) = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 & y^{(n-1)}(x_0) = 0 & \ldots & y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{array}$$

По теореме 14.1 о существовании и единственности у каждой из этих задач имеется решение, и мы обозначим y_1 – решение 1-й задачи, y_2 – решение 2-й задачи, …, y_n – решение n-ной задачи. Мы получили $y_1, \ldots, y_n$ – решения уравнения (15.2).

Найдем $W(x_0)$ для этих функций:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Следовательно, по теореме 17.1 функции $y_1, \dots, y_n$ образуют искомую фундаментальную систему решений уравнения $y_1, \dots, y_n$ (15.2). □

Теорема 17.3. Пусть $y_1, \dots, y_n$ – ФСР уравнения (15.2). Тогда для любого решения y этого уравнения существуют постоянные $c_1, \dots, c_n$ такие, что $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a; b)$ и рассмотрим систему уравнений относительно неизвестных

$$c_1, \dots, c_n : \begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = y(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = y'(x_0) \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) \end{cases} \tag{17.1}$$

Определитель этой системы $W(x_0)$ не равен 0, т.к. $y_1, \dots, y_n$ - фундаментальная система решений. Поэтому у нее существует (и притом единственное) решение $c_1, \dots, c_n$. Рассмотрим теперь функцию $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$. По теореме 15.2 она является решением уравнения (15.2). Ввиду равенств (17.1) значения этой функции $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ и ее производных до порядка $(n-1)$ включительно в точке x_0 совпадают со значениями y и ее последовательных производных в точке x_0. Получается, что y и $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ – решения одной и той же задачи Коши. По теореме 14.1 о единственности решения задачи Коши, $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$, $x \in (a; b)$. □

Замечание. Теоремы 17.2 и 17.3 означают, что размерность векторного пространства решений уравнения (15.2) равна n, а любая фундаментальная система решений представляет собой базис этого пространства.

18 Билет 18. Свойства решений линейного неоднородного дифференциального уравнения. Метод вариации постоянных

18.1 Свойства решений линейного неоднородного дифференциального уравнения

Теорема 18.1. Пусть $y_0(x)$ – **решение уравнения** (15.1)**. Тогда любое другое решение этого уравнения** $y(x)$ **имеет вид** $y(x) = y_0(x) + Y(x)$**, где** $Y(x)$ – **решение уравнения** (15.2)**, т.е.** $L(Y) = 0$**.**

Доказательство. Пусть $L(y) = q(x)$, $L(y_0) = q(x)$. Тогда $L(y - y_0) = L(y) - L(y_0) = q(x) - q(x) = 0$. Таким образом, $y - y_0$ есть некоторое решение Y однородного уравнения (15.2).

Обратно, если $L(y_0) = q(x)$ и $L(Y) = 0$, то $L(y_0 + Y) = q(x)$ и, следовательно, $y = y_0 + Y$ удовлетворяет уравнению (15.1). □

Теорема 18.2 (Принцип суперпозиции решений)**. Пусть** $y_i = y_i(x)$**,** $i = 1, \ldots, m$ **являются решениями уравнений** $L(y_i) = q_i(x)$**,** $i = 1, \ldots, m$**. Тогда функция** $y = y_1 + \cdots + y_m$ **удовлетворяет уравнению** $L(y) = q_1(x) + \cdots + q_m(x)$**.**

Доказательство. По следствию теоремы 15.1: $L(y_1 + \cdots + y_m) = L(y_1) + \cdots + L(y_m) = q_1(x) + \cdots + q_m(x)$. □

Замечание. Эта теорема служит для нахождения решения уравнения $L(y) = q(x)$ в случае, когда функцию $q(x)$ удается представить в виде $q(x) = q_1(x) + \ldots + q_m(x)$, где $q_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ – такие функции, что нам известны решения уравнений $L(y_i) = q_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$.

18.2 Метод вариации постоянных

Вернемся к неоднородному уравнению (15.1). Предположим, что мы можем найти фундаментальную систему решений $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (15.2). Тогда, по теореме 17.3, любое решение Y этого уравнения имеет вид:

$$Y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \tag{18.1}$$

Предположим также, что нам удалось найти некоторое решение y_0 уравнения (15.1). По теореме 18.1, любое решение y этого уравнения имеет вид:

$$y = y_0 + Y = y_0 + c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

согласно (18.1). Итак, для нахождения всех решений уравнения (15.1) требуется найти какое-то одно его решение y_0. Для этого можно использовать **метод вариации постоянных**, который состоит в том, что решение уравнения (15.1) ищется в виде:

$$c_1(x) y_1(x) + \cdots + c_n(x) y_n(x), \tag{18.2}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (15.1). Отметим, что (18.2) напоминает (18.1), но имеет существенное отличие от этого равенства, состоящее в том, что в (18.1) все c_i – постоянные, а в (18.2) это – неизвестные функции от x. Потребуем, чтобы кроме равенства (18.2) выполнялись такие равенства:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n \equiv 0 \\ c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} \equiv 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} \equiv q(x) \end{cases} \tag{18.3}$$

Из (18.2) и (18.3) следует, что

$$(c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n)' = c_1 y_1' + c_1' y_1 + \cdots + c_n y_n' + c_n' y_n =$$

$$= (c_1 y_1' + \dots + c_n y_n') + (c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n) = c_1 y_1' + \dots + c_n y_n';$$

$$(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n)'' = (c_1 y_1' + \dots + c_n y_n')' = c_1 y'' + \dots + c_n y_n'' +$$

$$+ (c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n') = c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n''$$

и т.д.,

$$(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n)^{(n-1)} = \left(c_1 y_1^{(n-2)} + \dots + c_n y_n^{(n-2)}\right)' = c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} +$$

$$+ \left(c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)}\right) = c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)}$$

и, наконец,

$$(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n)^{(n)} = \left(c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)}\right)' = c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} +$$

$$+ \left(c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}\right) = c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} + q\,(x)\,.$$

Поэтому подстановка $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ в левую часть уравнения (15.1) дает:

$$\left(c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} + q\,(x)\right) + P_{n-1}\,(x) \left(c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)}\right) + \dots +$$

$$+ P_1\,(x)\,(c_1 y_1' + \dots + c_n y_n') + P_0\,(x)\,(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n) =$$

$$= c_1 \left(y_1^{(n)} + P_{n-1}\,(x)\, y_1^{(n-1)} + \dots + P_1\,(x)\, y_1' + P_0\,(x)\, y_1\right) + \dots +$$

$$+ c_n \left(y_n^{(n)} + P_{n-1}\,(x)\, y_n^{(n-1)} + \dots + P_1\,(x)\, y_n' + P_0\,(x)\, y_n\right) + q\,(x)\,,$$

т.е. обращает уравнение в верное равенство. Поэтому y, определяемое равенством (18.2) и системой условий (18.3) является решением уравнения (15.1). Это решение – единственное, по теореме 14.1. Для того, чтобы отыскать $c_1, \dots, c_n$ следует воспользоваться системой (18.3), рассматривая ее как систему линейных уравнений относительно неизвестных $c_1', \dots, c_n'$ с определителем $W\,(x) \neq 0$. Решая систему, находим $c_1', \dots, c_n'$, а затем, интегрированием, находим $c_1, \dots, c_n$.

19 Билет 19. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Для уравнений

$$L(y) = 0, \tag{19.1}$$

у которых

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y \tag{19.2}$$

где $a_{n-1}, \dots, a_0$ – постоянные величины, существует способ, с помощью которого задачу нахождения фундаментальной системы решений можно свести к задаче нахождения корней некоторого вспомогательного алгебраического уравнения.

Для этого будем искать решения уравнения $L(y) = 0$ в виде $y = e^{\lambda x}$. При этом

$$y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots,\ y^{(n-1)} = \lambda^{n-1} e^{\lambda x},\ y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x} \tag{19.3}$$

Подставим полученные величины в уравнение (19.1):

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$$

или

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0$$

Поскольку $e^{\lambda x} \neq 0$ при всех x, из этого уравнения следует, что

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{19.4}$$

Таким образом, функция $y = e^{\lambda x}$ удовлетворяет уравнению (19.1) тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению (19.4). Уравнение (19.4) называется **характеристическим уравнением** уравнения (19.1).

Далее мы установим вид фундаментальной системы решений уравнения (19.1) в зависимости от свойств корней уравнения (19.4)

Случай 1. Пусть все корни уравнения (19.4) действительные и различные. Обозначим их $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и рассмотрим функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}$, являющиеся решениями уравнения (19.1) по доказанному выше. Докажем линейную независимость, это будет означать, что $y_1, \ldots,\ y_n$ – фундаментальная система решений (19.1).

Определитель Вронского этой системы функций равен, с учетом (19.2):

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {y_1}^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {\lambda_1}^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \ldots & {\lambda_n}^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}$$

или, после вынесения из столбцов множителей $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$:

$$W(x) = e^{\lambda_1 x} \cdots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {\lambda_1}^{n-1} & \ldots & {\lambda_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Определитель $\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {\lambda_1}^{n-1} & \ldots & {\lambda_n}^{n-1} \end{vmatrix}$ представляет собой известный определитель Вандермонда. Он равен $\prod_{1 \le k < i \le n} (\lambda_i - \lambda_k)$, поэтому, если все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ попарно различны, этот определитель не равен 0. Следовательно, как доказано выше (теорема 17.1), функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}$ линейно независимы и составляют искомую фундаментальную систему решений.

Случай 2. Все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различные, но среди них есть комплексные числа. Формально $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ – это снова фундаментальная система решений уравнения, т.к. эти функции линейно независимы (их определитель Вронского, как и в случае 1, отличен от 0). Однако мы рассматриваем уравнение с **действительными коэффициентами**, и нам было бы желательно построить фундаментальную систему решений, состоящую из действительных функций.

Для этого мы сначала установим следующую важную лемму.

Лемма 19.1. Пусть $L(y) = 0$ **– линейное однородное дифференциальное уравнение** (19.1) **такое, что все постоянные** $a_0, \dots, a_{n-1}$ **– действительные числа. Пусть комплексная функция** $u(x) + iv(x)$ **удовлетворяет этому уравнению. Тогда ему удовлетворяют и функции** $u(x)$, $v(x)$**.**

Доказательство. Равенство $L(y) = 0$ означает:

$$u^{(n)} + iv^{(n)} + a_{n-1}(u^{(n-1)} + iv^{(n-1)}) + \dots + a_1(u' + iv') + a_0(u + iv) = 0$$

откуда

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u + i(v^{(n)} + a_{n-1}v^{(n-1)} + \dots + a_1v' + a_0v) = 0$$

Комплексная величина $L(u) + iL(v)$ равна 0 тогда и только тогда, когда ее действительная часть $L(u)$ и мнимая часть $iL(v)$ равны 0. откуда $L(u) = 0$, $L(v) = 0$, т.е. u и v — решения уравнения (19.1), что и требовалось доказать. □

Пусть теперь $\lambda = \alpha + \beta i$ – любой комплексный корень уравнения (19.4). Поскольку (19.4) имеет действительные коэффициенты, число $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ также является его корнем. Значит, $e^{\overline{\lambda}x}$, — тоже решение уравнения (19.1).

Далее: $e^{\lambda x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x + \beta i x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$. По лемме, $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$ также являются решениями уравнения (19.1). Легко видеть, $e^{\overline{\lambda}x} = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$, т.е. $e^{\lambda x}$, $e^{\overline{\lambda}x}$, являются линейными комбинациями $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$. Разумеется, $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$ также можно линейно выразить через $e^{\lambda x}$, и $e^{\overline{\lambda}x}$. Поэтому линейная независимость решений $e^{\lambda x}$, и $e^{\overline{\lambda}x}$, с остальными решениями уравнения (19.1) равносильна линейной независимости $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$ с остальными решениями.

Подведем итоги. В случае, когда все $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – различные, причем $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – действительные, а λ_{r+1}, $\overline{\lambda_{r+1}}, \lambda_{r+2}$, $\overline{\lambda_{r+2}}, \dots, \lambda_{r+s}$, $\overline{\lambda_{r+s}}$ – пары комплексно сопряженных чисел ($r + 2s = n$), причем $\lambda_{r+k} = \alpha_k + i\beta_k,\ k = 1, \ldots, s$, то фундаментальная система решений уравнения (19.1) имеет вид:

$$e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_r x},\ e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \ldots, e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x,\ e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x$$

Случай 3. Корни характеристического уравнения действительные, но среди них есть кратные. Напомним, что число λ называется **корнем многочлена** $P(x)$ **кратности** k, если $P(x) = (x-\lambda)^k P_1(x)$, где $P_1(x)$ – многочлен, причем $P_1(\lambda) \neq 0$.

Пусть корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ имеют, соответственно, кратности $k_1, \ldots, k_t$. Тогда можно доказать (но мы оставим это *без доказательства*), что функции

$$\begin{array}{c} e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x},\ xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x} \\ \ldots \\ e^{\lambda_t x},\ xe^{\lambda_t x}, \ldots, x^{k_t-1}e^{\lambda_t x} \end{array}$$

составляют фундаментальную систему решений уравнения (19.1).

Пример. Уравнению $y'' - 2y' + y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $(\lambda-1)^2 = 0$. Оно имеет корень $\lambda = 1$ с кратностью 2. Рассмотрим функции e^x и xe^x: $(e^x)' = e^x$, $(e^x)'' = e^x$ и, подставляя e^x в исходное уравнение, получаем $e^x - 2e^x + e^x = 0$, т.е. верное равенство. Далее, $(xe^x)' = e^x + xe^x$, $(xe^x)'' = 2e^x + xe^x$ и подстановка функции xe^x в уравнение дает верное равенство: $2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x = 0$.

Итак, e^x и xe^x – действительно решения уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Эти функции линейно независимы, т.к. из равенства $c_1e^x + c_2xe^x \equiv 0$ при $x = 0$ следует $c_1e^0 = 0$, $c_1 = 0$. Значит, $c_2xe^x = 0$. Тогда при $x = 1$ $c_2e = 0$, $c_2 = 0$.

Случай 4. Когда действительные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ уравнения (19.1) имеют кратности $k_1, \ldots, k_r$, а комплексные корни $\lambda_{r+1}, \overline{\lambda_{r+1}}, \lambda_{r+2}, \overline{\lambda_{r+2}}, \ldots, \lambda_{r+s}, \overline{\lambda_{r+s}}$ имеют кратности $l_1, \ldots, l_s$, можно доказать, что функции

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$$
$$\dots$$
$$e^{\lambda_r x}, xe^{\lambda_r x}, \dots, x^{k_r-1}e^{\lambda_r x}$$

$$\begin{array}{cccc}
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & \dots, & x^{l_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x \\
e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & \dots, & x^{l_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x \\
 & & \dots & \\
e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x, & xe^{\alpha_s x}\cos\beta_s x, & \dots, & x^{l_s-1}e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x \\
e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x, & xe^{\alpha_s x}\sin\beta_s x, & \dots, & x^{l_s-1}e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x
\end{array}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (19.1).

Осталось напомнить, что, согласно теореме 17.3, произвольное решение уравнения (19.1) имеет вид: $y = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$, где в качестве $f_1, \dots, f_n$ можно в каждом из рассмотренных случаев выбрать построенные элементы фундаментальной системы решений.

20 Билет 20. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений, для решения уравнения

$$L(y) = q(x) \tag{20.1}$$

достаточно знать фундаментальную систему решений $y_1, \ldots, y_n$ однородного уравнения

$$L(y) = 0 \tag{20.2}$$

и найти хотя бы одно решение $y_0(x)$ неоднородного уравнения. Тогда любое решение у неоднородного уравнения имеет вид: $y = y_0 + c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$, где $c_1, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные. В случае уравнения с постоянными коэффициентами мы в предыдущем параграфе указали способы нахождения его фундаментальной системы решений. Используя метод вариации постоянных, можно теперь найти решение и неоднородного уравнения. Однако, есть важные частные случаи, когда решение неоднородного уравнения можно отыскать значительно проще.

Пусть

$$L(y) = \sum \widetilde{P}_r(x) e^{\gamma_r x} \tag{20.3}$$

где $\widetilde{P}_r(x)$ - многочлены, γ_r – действительные числа. Согласно принципу суперпозиции (теорема 18.2), достаточно уметь решать уравнения вида

$$L(y) = \widetilde{P}(x) e^{\gamma x} \tag{20.4}$$

Тогда, решив каждое из уравнений $L(y) = \widetilde{P}_r(x) e^{\gamma_r x}$ и просуммировав полученные решения, мы получим решение исходного уравнения (20.3).

Если число γ не является корнем характеристического уравнения для (20.2), то ищем решение уравнения (20.4) в виде $e^{\gamma x} \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ имеет ту же степень, что и $\widetilde{P}(x)$. Если число γ - корень характеристического многочлена кратности s, то искать решение (20.4) следует в виде $y = e^{\gamma x} \cdot x^s \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ имеет такую же степень, как многочлен $\widetilde{P}(x)$.

Если правая часть (20.1) есть $e^{\alpha x}(\widetilde{P}(x)\cos\beta x + R(x)\sin\beta x)$, то, в случае, когда число $\alpha + i\beta$ не есть корень характеристического уравнения для (20.2), частное решение (20.1) в виде $e^{\alpha x}(Q(x)\cos\beta x + T(x)\sin\beta x)$, где $Q(x),\ T(x)$ - многочлены, степени которых равны наибольшей из степеней многочленов $\widetilde{P}(x), R(x)$.

В случае же, когда $\alpha + i\beta$ - корень характеристического многочлена кратности s, то ищем решение в виде $x^s e^{\alpha x}(Q(x)\cos\beta x + T(x)\sin\beta x)$, с тем же условием на степени многочленов $Q(x)$ и $T(x)$.