*Московский Государственный Университет
им. М.В.Ломоносова*

Химический факультет.

Пособие для подготовки к экзамену по математическому анализу для студентов общего потока.

Второй семестр.

Лектор – проф. В.Г.Чирский

Москва, 2010

Уважаемый коллега!

Перед вами конспект лекций по математическому анализу проф. В.Г. Чирского. Конспект составлен на основе работы предшественников с исправлениями, внесёнными редакцией. Отдельная благодарность выражается редактору Максимовой А.Г., наборщику Яско И.С. а также разработчику стиля Денисову С.С. Удачи на экзамене.

Гл. редактор Каменев Е.И.

Билет 1. Неопределённыё интеграл и его свойства. Таблица неопределённых интегралов

1.1. Основное определение

Пусть $f(x)$ определена в промежутке X. Функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией для*** $f(x)$**,** если для любого $x \in X$ выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

1.2. Основная лемма интегрального счисления

Если в некотором промежутке X (конечном или бесконечном) функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то и любая функция $F(x)+C$ - тоже является первообразной для $f(x)$; и обратно: для любой функции $\Phi(x) = F(x) + C$.

►**Доказательство** Очевидно, $(F(x)+C)' = F'(x) + 0 = f(x)$ и первая часть теоремы доказана. Пусть $\Phi(x)$ - какая-либо первообразная для $f(x)$. Рассмотрим разность $\Phi(x) - F(x)$. Производная этой функции $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. По следствию из теоремы Лагранжа получим, что $\Phi(x) = F(x) + C$, что и требовалось доказать. ◄

Множество первообразных для функции $f(x)$ на заданном промежутке называется её неопределённым интегралом и обозначается $\int f(x)dx$.

По доказанной лемме, оно имеет следующую структуру: $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$, где $F(x)$ - произвольная первообразная, а C - произвольная постоянная. Обычно используется обозначение

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

в котором первая часть раенства обозначает не одну из функций, а всё семейство функций, образующих интеграл.

1.3. Таблицы основных интегралов

Каждая формула $F'(x) = f(x)$ сразу приводит к соответствующей формуле

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Поэтому, используя формулы для произвольных элементарных функций получим следующую таблицу:

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int 1 \cdot dx = x + C$

3. $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$, $\mu \neq -1$. (1)

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C_1, \text{ если } x > 0, \\ \ln(-x) + C_2, \text{ если } x < 0. \end{cases}$ (2)

Эти формулы часто соединяют в одну: $\ln|x| + C$*. При этом следует иметь в виду, что множество, на котором определена функция* $f(x) = \dfrac{1}{x}$*, состоит из двух промежутков, задаваемых неравенствами* $x > 0$ *и* $x < 0$*, соответственно. На каждом из этих промежутков постоянную можно выбирать независимо, что и отражено в формуле (2). Так что формулу* $\ln|x| + C$ *не следует понимать так, что к функции* $\ln|x|$ *прибавляется одна и та же постоянная С как при* $x > 0$*, так и при* $x < 0$*. Еще раз повторим – точный смысл отражен в формуле (2).*

Это же замечание можно сделать для формулы (1) при $\mu < 0$ *и таком, что* x^{μ} *определена как при* $x > 0$*, так и при* $x < 0$.

5. $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$,

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \arcsin x + C$,

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$,

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$,

и, так как функция определена на бесконечном множестве промежутков $\pi n < x < \pi(n+1)$, $n \in Z$*, для каждого* n *следует выбирать свою постоянную* C_n.

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$,

разумеется, замечание, аналогичное сделанному в п.10, справедливо и здесь.

1.4. Правила интегрирования

- $\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

► $\left.\begin{matrix} \left(\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx \right)' = f(x) \pm g(x) \\ \left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx \right)' = f(x) \pm g(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ ◄

- Если $a \neq 0$, то $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

►Доказательство аналогично предыдущему◄

Замечание. *При* $a = 0$ *формула не верна по двум причинам. Во-первых, может не существовать интеграл в правой ее части, в то время как интеграл в левой ее части существует для любой функции* $f(x)$ *и равен произвольной постоянной. Во-вторых, в случае существования интеграла* $\int f(x)\,dx$ *правая часть в формуле равна 0 и опять не совпадает с ее левой частью.*

С помощью этих правил и формул из таблицы неопределенных интегралов можно вычислить интегралы всех целых рациональных функций и некоторых других функций, представимых в форме суммы тех функций, интегралы которых могут быть найдены.

Например, имеем

$$\int \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

$$\int \left(\sqrt{x} + 1 \right)^3 dx = \int x^{3/2}dx + 3\int xdx + 3\int x^{1/2}dx + \int dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{3}{2}x^2 + 2x^{3/2} + x + C.$$

1.5. Интегрирование по частям

Предыдущие правила не дают указаний на способы вычисления интегралов, например, от функций $x^\alpha \ln x$, $x^n e^x$. Для того, чтобы продвинуться дальше, рассмотрим прием интегрирования, обратный приему дифференцирования произведения двух функций.

Из равенства $d(UV)=UdV+VdU$ следует, что $\int d(UV)=\int UdV+\int VdU$. Отсюда

$$\int UdV=\int d(UV)-\int VdU.$$

Но интеграл от дифференциала функции совпадает с этой функцией или отличается от нее на постоянную величину; т.е., $\int d(UV)=UV$. Учитывая это, получим

$$\int UdV=UV-\int VdU. \qquad (3)$$

Здесь мы не писали произвольной постоянной первого интеграла потому, что такая постоянная имеется во втором интеграле (сумма двух произвольных постоянных – произвольная постоянная).

Формула (3) называется формулой интегрирования по частям.

Рассмотрим примеры применения этой формулы:

1. $\int x^{\alpha}\ln x dx$, $\alpha\neq -1$.

   Полагая $U=\ln x$, $dU=\dfrac{dx}{x}$, $dV=x^{\alpha}dx$, $V=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, находим

$$\int x^{\alpha}\ln x dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x-\int\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x-\frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}+C.$$

   В частности, $\int\ln x dx=x\ln x-x+C$.

2. $\int xe^{x}dx$.

В первом примере у нас не могло быть двух мнений по поводу выбора множителей U и dV. Там мы не могли положить $dV=\ln x dx$, потому что в этом случае мы не знали бы, чему равно V (первообразная от логарифмической функции нам была неизвестна). Множители x и e^{x} в этом смысле кажутся одинаково удобными. Однако при определении множителей U и dV нужно руководствоваться тем, что в итоге применения формулы интегрирования по частям должен получиться более простой интеграл. Иными словами, выражение $VdU=V\cdot\dfrac{dU}{dx}dx$ должно быть проще выражения $UdV=U\cdot\dfrac{dV}{dx}dx$. Значит, за U берем тот из множителей, производная которого больше упрощается. Полагаем:

$$U=x,\ dU=dx,\ dV=e^{x}dx,\ V=e^{x}.$$

При этом $\int xe^{x}dx=xe^{x}-\int e^{x}dx=xe^{x}-e^{x}+C$.

3. $\int x^2 e^x dx$.

Полагая $U = x^2$, $dU = 2xdx$, $dV = e^x dx$, $V = e^x$, находим

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2\int x d\left(e^x\right) = x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Два последних примера позволяют сделать вывод, что интеграл от функции $P(x)e^x$ ($P(x)$ - многочлен) представляется в форме:

$$\int e^x \sum_{k=0}^{n} a_k x^k dx = e^x \sum_{k=0}^{n} A_k x^k + C.$$

Для определения коэффициентов A_k следует продифференцировать обе части равенства и приравнять коэффициенты при подобных слагаемых. Такой прием интегрирования встретится и в других случаях.

Здесь мы рассмотрим только один пример такого рода.

4. $\int e^x \left(2x^2 + x + 1\right) dx$.

Пишем $\int \left(2x^2 + x + 1\right) e^x dx = e^x \left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right) + C$.

Дифференцируя обе части равенства:

$$\left(\int e^x \left(2x^2 + x + 1\right) dx\right)' = e^x \left(2x^2 + x + 1\right) = e^x \left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right) + e^x \left(A_1 + 2A_2 x\right) =$$
$$= e^x \left[\left(A_0 + A_1\right) + \left(A_1 + 2A_2\right) x + A_2 x^2\right].$$

Так как $e^x \neq 0$, то

$$2x^2 + x + 1 = \left(A_0 + A_1\right) + \left(A_1 + 2A_2\right) x + A_2 x^2.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем

$$A_2 = 2,\ A_1 + 2A_2 = 1,\ A_0 + A_1 = 1 \ \Rightarrow A_1 = -3,\ A_0 = 4$$

Окончательно,

$$\int e^x \left(2x^2 + x + 1\right) dx = e^x \left(4 - 3x + 2x^2\right) + C.$$

5. $\int e^x \sin x dx$.

В этом примере производные функций e^x и $\sin x$ не упрощаются. Значит, в качестве U может быть принят любой из этих множителей. Полагая

$$U = e^x,\ dU = e^x dx,\ dV = \sin x dx,\ V = -\cos x,$$

находим

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Последний интеграл оказался такой же сложности, что и исходный. Однако избранный нами путь не окажется безнадежным, если мы применим к последнему интегралу еще раз формулу интегрирования по частям:

$$U = e^x,\ dU = e^x dx,\ dV = \cos x dx,\ V = \sin x,$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Подставляя в ранее найденное равенство значение этого интеграла, получим

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Перенося интеграл из правой части равенства в левую, учтем, что в левой части уже есть произвольная постоянная. Ее, следовательно, надлежит оставить и в правой части равенства. При этом получим:

$$2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) + C,\ \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

(*Половина произвольной постоянной – произвольная постоянная*).

1.6. Замена переменной интегрирования

Переходим к изучению приема интегрирования, обратного приему дифференцирования сложной функции.

Предположим, что функция $F(x)$ - одна из первообразных функций для функции $f(x)$, $F'(x) = f(x)$ и $\int f(x)dx = F(x) + C$. Вычислим интеграл

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Поскольку из равенства

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

следует, что функция $F(\varphi(x))$ - первообразная для функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Все это дает нам право писать равенства

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(U)dU = F(U) + C = F(\varphi(x)) + C,$$

согласно которым вычисление первого из этих интегралов с помощью замены переменной $U = \varphi(x)$ сведено к вычислению последнего интеграла (при выполнении всех условий теоремы о дифференцировании сложной функции).

При этом вычисление последнего интеграла сводится с помощью той же замены переменной к вычислению первого интеграла, если функция $U = \varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы о существовании и дифференцируемости обратной функции, поскольку в этом втором случае после вычисления первого интеграла мы должны будем вместо величины x подставить ее значение, которое может быть найдено из уравнения $U = \varphi(x)$, и решением этого уравнения будет функция $x = \psi(U)$, обратная для $U = \varphi(x)$.

Таким образом,

$$\int f(U)dU = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \Phi(x) + C = \Phi(\psi(U)) + C,$$

где $\Phi(x)$ - первообразная функция функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Последнее равенство содержит фактически бесконечно много равенств, получающихся для тех или иных функций $U = \varphi(x)$. Задача замены переменной и состоит в том, чтобы из всех замен переменной выбрать такую, которая упрощает подынтегральное выражение. Задача эта сложная вследствие большого многообразия возможных замен. В этом отношении метод интегрирования по частям проще: там имеется конечное число различных вариантов. Кроме того, там можно было указать принцип, придерживаясь которого, интегрирование по частям доводилось до конца всякий раз, когда такое доведение было возможно.

Рассмотрим несколько примеров, в которых применяется замена переменной к вычислению интегралов.

1. $\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}$

Положив $U = \varphi(x)$, $dU = \varphi'(x)dx$, найдем

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \int \frac{dU}{U} = \ln|U| + C = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Это равенство полезно запомнить.

2. Предположим, что функция $F(x)$ - первообразная для $f(x)$.

Вычислим интеграл:

$\int f(ax+b)dx$, $a,b \in R$, $a \neq 0$.

Полагая $U = ax+b$, $dU = adx$, $dx = \frac{1}{a}dU$, находим

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(U)dU = \frac{1}{a}F(U) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Пользуясь этим, получим

$$\int (ax+b)^{\alpha}\,dx = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C,\ \alpha \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1/a}arctg\frac{x}{a} + C = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1/a}\arcsin\frac{x}{a} + C = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0.$$

Билет 2. Интегрирование рациональных функций.

2.1. Алгебраическое введение

Рассмотрим некоторые нужные нам в дальнейшем сведения алгебраического характера. Всякая рациональная функция может быть представлена в виде дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами; т.е.

$$P(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m,\ b_0 \neq 0$$

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Не нарушая общности, можно считать, что $a_0 = 1$.

Такую дробь называют обычно ***рациональной дробью***. Если $m < n$, то рациональная дробь называется ***правильной***; если же $m \geq n$ – ***неправильной***. Если рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ является неправильной, то делением числителя на знаменатель она может быть представлена в виде суммы $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, (1)

в которой $S(x)$ (частное) – многочлен с показателем степени k ($k = m - n$) и $R(x)$ (остаток) – тоже многочлен, показатель степени которого ниже показателя степени n многочлена $Q(x)$. Таким образом, неправильная рациональная дробь может всегда быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример 1: $\frac{x^5 + 3x^3 + x^2}{x^3 + 2x + 1} = x^2 + 1 - \frac{2x + 1}{x^3 + 2x + 1}$

В высшей математике доказывается, что ***всякая правильная рациональная дробь представима в виде суммы некоторого количества так называемых простых дробей следующих четырех типов***:

I. $\frac{A}{x-a}$

II. $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, $(\alpha = 2,3,4...)$,

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$

IV. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^\beta}$, $(\beta=2,3,4...)$

Где A, M, N, a, p, q – постоянные действительные числа и $\dfrac{p^2}{4}-q<0$ (или $q-\dfrac{p^2}{4}>0$); т.е. трехчлен x^2+px+q не раскладывается на множители.

Рассмотрим эту теорему в частных случаях.

1. Если уравнение $Q(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0$ имеет только простые действительные корни a, b, … (их всего n), то правильную рациональную дробь $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы простых дробей

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)...}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+... \tag{2}$$

Пример: $\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}=\dfrac{2x+2}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}$

2. Пусть уравнение $Q(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0$ опять обладает только действительными корнями, но среди этих корней имеются кратные, например, корень a кратности α, корень b кратности β, и т.д. (в частности все корни могут быть кратными). Тогда правильную рациональную дробь $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы простых дробей

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta...}=\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+...+\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+$$
$$+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}+...+\frac{B_1}{x-b}. \tag{3}$$

где в недописанной части могут быть члены, соответствующие простым корням уравнения $Q(x)=0$.

3. Легко проверяется, что если уравнение $Q(x)=0$ имеет комплексный корень $a=u+iv$ $(v\neq 0)$ (т.е. $Q(a)=0$), то оно обязано иметь также комплексно сопряженный ему корень $\overline{a}=u-iv$ (т.е. $Q(\overline{a})=0$). Действительно, на основании свойств комплексного сопряжения и условия вещественности коэффициентов многочлена $Q(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ заключаем, что $\overline{Q(a)}=Q(\overline{a})$, и так как $\overline{Q(a)}=\overline{0}=0$ (число комплексно сопряженное к нулю равно нулю), то $Q(\overline{a})=0$.

В этом случае

$$Q(x) = \left(x-a\right)\left(x-\overline{a}\right)\ldots = \left(x-u-iv\right)\left(x-u+iv\right)\ldots = \left[\left(x-u\right)^2+v^2\right]\ldots$$

Множитель $\left[\left(x-u\right)^2+v^2\right]$ можно, очевидно, представить в виде x^2+px+q, так что уравнение $x^2+px+q=0$ имеет только комплексные корни $u \pm iv$; т.е., трехчлен x^2+px+q не раскладывается на действительные корни.

Пусть среди корней уравнения $Q(x)=0$ имеются комплексные корни, которые все являются простыми. Согласно сказанному выше, совокупности этих корней будут соответствовать множители (x^2+px+q), $\left(x^2+rx+s\right)$, ... разложения многочлена $Q(x)$ (т.е., $Q(x)=(x^2+px+q)\left(x^2+rx+s\right)\ldots$). При этом правильную рациональную дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы простых дробей

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{(x^2+px+q)\left(x^2+rx+s\right)\ldots} = \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)} + \frac{U_1x+W_1}{(x^2+rx+s)} + \ldots \qquad (4)$$

Где в недописанной части могут быть члены, соответствующие действительным корням уравнения $Q\left(x\right)=0$ (смотреть предыдущие два случая).

Пример: $\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x^2-x+1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}.$

4. Среди корней уравнения $Q(x)=0$ имеются кратные комплексные корни, например, корень $u+iv$ кратность – β, корень u_1+iv_1 кратности σ, и т.д.

   Согласно сказанному выше, этим корням будут соответствовать множители $(x^2+px+q)^\beta$, $\left(x^2+rx+s\right)^\sigma$, *... разложение многочлена* $Q(x)$*; т.е.,*
   $Q(x)= (x^2+px+q)^\beta \left(x^2+rx+s\right)^\sigma \ldots$

   При этом правильную рациональную дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$ *можно представить в виде суммы простых дробей*

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{\beta}\left(x^2+rx+s\right)^{\sigma}\cdot\ldots}=\frac{M_{\delta}x+N_{\delta}}{\left(x^2+px+q\right)^{\beta}}+$$
$$+\frac{M_{\delta-1}x+N_{\delta-1}}{\left(x^2+rx+s\right)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{\upsilon_{\delta}x+\omega_{\delta}}{\left(x^2+rx+s\right)^{\sigma}}+\frac{\upsilon_{\delta-1}x+\omega_{\delta-1}}{\left(x^2+rx+s\right)^{\sigma-1}}+$$
$$\ldots+\frac{\upsilon_1x+\omega_1}{x^2+rx+s}+\ldots \qquad (5)$$

где в недописанной части могут быть члены, соответствующие простым комплексным корням и действительным корням уравнения $Q(x)=0$ (см. предыдущие три случая).

Рассмотренные нами четыре случая полностью решают вопрос о ***возможности*** представления всякой правильной рациональной дроби в виде суммы простых дробей. Теперь встаёт вопрос: как в том или ином случае ***практически*** находятся постоянные коэффициенты в числителях простых дробей соответствующего разложения? Это делается обычно с помощью ***метода неопределённых коэффициентов***.

В первую очередь определяют, по какой из формул (2)-(5) следует представить данную правильную дробь. Затем записывают соответствующее разложение с ***буквенными коэффициентами***. Далее приводят все дроби к общему знаменателю, которым, естественно, будет $Q(x)$.

Отбрасывая слева и справа этот знаменатель, приходят к равенству двух многочленов, тождественному относительно x: справа с буквенными коэффициентами, слева – с конкретными числами. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходят к системе уравнений, из которой и находят значения буквенных коэффициентов. Соответствующие примеры рассмотрим в пункте 2.3.

2.2. Неопределённый интеграл от рациональной функции

<u>Теорема 2.1.</u> **Неопределённый интеграл от всякой рациональной функции всегда выражается в конечном виде через алгебраические, логарифмические и обратные тригонометрические (круговые) функции; т. е., в конце концов, через элементарные функции.**

►**Доказательство** С помощью формул (1)-(5) (пункт 2.1) всякую рациональную функцию $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы многочлена степени k, если показатель степени числителя $P(x)$ на k единиц выше показателя степени знаменателя $Q(x)$, и простых дробей типов I-IV.

Тогда нахождение интеграла от данной рациональной функции приведет к нахождению интегралов от многочлена и от простых дробей. Рассмотрим все возможные случаи интегрирования.

Интеграл от многочлена степени k есть многочлен степени $k+1$. Действительно,

1. $\int\left(C_0x^k + C_1x^{k-1} + \ldots + C_k\right)dx = \dfrac{C_0x^{k+1}}{k+1} + \dfrac{C_1x^k}{k} + \ldots + C_kx + C$ (алгебраическая функция).

Интегралы простых дробей I и II типов выражаются через логарифмические и алгебраические функции. Действительно,

2. $\int\dfrac{Adx}{x-a} = A\ln\left|x-a\right| + C$

3. $\int\dfrac{Adx}{\left(x-a\right)^{\alpha}} = \dfrac{A}{(\alpha-1)\left(x-a\right)^{\alpha-1}} + C \quad (\alpha = 2, 3, 4, \ldots)$

Интегралы простых дробей III и IV типов выражаются через алгебраические, логарифмические и обратные тригонометрические функции. Имеем сначала

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int\frac{Mx+N}{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)}dx$$

Пусть $x+\dfrac{p}{2} = z$ тогда $dx = dz$ и $Mx+N = Mz + \left(N-\dfrac{Mp}{2}\right)$. Обозначим $q-\dfrac{p^2}{4} = a^2$ (т. к. $q-\dfrac{p^2}{4} > 0$). Получаем

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int\frac{Mz+\left(N-\dfrac{Mp}{2}\right)}{z^2+a^2}dz =$$
$$= \frac{M}{2}\int\frac{2zdz}{z^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln(z^2+a^2) + \frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)arctg\frac{z}{a} + C$$

Возвращаясь к переменной x и подставляя вместо a его значение, получаем:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{Mz}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Осталось указать только способ вычисления интеграла $\int\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\delta}}dx \quad (\delta = 2, 3, 4, \ldots)$.

Сделав преобразование и подстановку так же, как и в предыдущем случае, получаем:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\delta}}dx = \int\frac{Mz+(N-\dfrac{Mp}{2})}{(z^2+a^2)^{\delta}}dz = \frac{M}{2}\int\frac{2zdz}{(z^2+a^2)^{\delta}} + (N-\frac{Mp}{2})\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{\delta}}.$$

Первый из этих интегралов находим подстановкой $v = z^2 + a^2$, т. е.,

$$\int \frac{2zdz}{(z^2+a^2)^\delta} = \int \frac{dv}{v^\delta} = -\frac{1}{\delta-1} \cdot \frac{1}{v^\delta - 1} + C = -\frac{1}{\delta-1} \cdot \frac{1}{(z^2+a^2)^{\delta-1}} + C$$

Второй интеграл $\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^\delta}$ находим с помощью рекуррентной формулы

$$I_\delta = \int \frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^\delta} = z\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^\delta} + \delta \int \frac{2z^2dz}{\left(z^2+a^2\right)^{\delta+1}} = z\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^\delta} + 2\delta \int \frac{(z^2+a^2-a^2)dz}{\left(z^2+a^2\right)^{\delta+1}} =$$

$$= z\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^\delta} + 2\delta I_\delta - 2\delta a^2 I_{\delta+1},$$

откуда

$$I_{\delta+1} = \frac{(2\delta-1)I_\delta}{2\delta a^2} + \frac{z}{2\delta a^2(z^2+a^2)^\delta}, \delta = 0,1,2,...$$

Применяя эту формулу $\delta - 1$ раз, мы приходим к вычислению интеграла $\int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{z}{a} + c$

Во всех полученных таким образом решениях заменяем z через x. На основании этих результатов получаем выражение для $\int \frac{M_x + N}{(x^2+px+q)^\delta}dx,$ которое представляет собой выражение, содержащее ***алгебраическую и обратную тригонометрическую функцию***

Из результатов интегрирования представленных формулами 1, 2, 3, 4, 5 вытекает справедливость теоремы.◄

2.3. Метод интегрирования рациональных функций

Доказанная в пункте 2.2 теорема позволяет сформулировать следующий ***метод интегрирования рациональных функций***.

В данной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ выделяется в качестве слагаемого многочлена $S(x)$ целая часть степени k, если показатель степени числителя $P(x)$ выше показателя степени знаменателя $Q(x)$ на k единиц; т. е. выписывается формула (1). Затем раскладывается знаменатель $Q(x)$ на действительные линейные и квадратные множители, так что $Q(x) = ... \cdot (x-a) \cdot ... \cdot (x^2+px+q)^\delta$. Далее правильная рациональная дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$ формулы (1) представляется в виде суммы простых дробей согласно формулам (2)-(5); при этом коэффициенты разложения определяются методом неопределённых коэффициентов. После всех этих преобразований данной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ находится её неопределенный интеграл, который определяется доказанной в пункте 2.2 теоремой.

Рассмотрим примеры на применение изложенного метода интегрирования.

1. Найти $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$

Решение. В подынтегральной функции выделяется многочлен второй степени делением числителя на знаменатель:

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \tag{6}$$

Раскладываем знаменатель данной дроби на простые множители

$x^3 - 4x = x(x+2)\cdot(x-2)$.

Правильную рациональную дробь формулы (6) представляем по формуле (2)

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

Домножив на знаменатель $x^3 - 4x$, получаем:

$$4x^2 + 16x - 8 = A\left(x^2 - 4\right) + Bx\left(x-2\right) + Cx\left(x+2\right) \tag{7}$$

Приводим подобные слагаемые:

$$4x^2 + 16x - 8 = x^2\left(A + B + C\right) + x\left(-2B + 2C\right) - 4A$$

Получаем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} A + B + C = 4, \\ -2B + 2C = 16, \\ -4A = -8. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = 2,\ B = -3,\ C = 5.$ Поэтому

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2} \tag{8}$$

Приняв во внимание (6) и (8), находим:

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int (x^2+x+4+\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2})dx =$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|-3\ln|x+2|+5\ln|x-2|+C$$

Замечание. *Часто при нахождении коэффициентов разложения применяют другой прием, который сводится к тому, что в тождестве, полученном после отбрасывания общего знаменателя в обеих его частях придают х некоторые «выгодные» числовые значения и тем самым получают опять-таки уравнения, служащие для отыскания неизвестных коэффициентов простых дробей. Этот прием особенно выгоден в случае простых корней.*

Так, в рассмотренном примере имеем тождество (7). Уравнение $x^3-4x=0$ *имеет корни* $x_1=0,\ x_2=-2,\ x_3=2$. *В тождестве (7) придаем* x *последовательно значения, равные этим корням. Это сразу дает*

При х=0	$-8=-4A$
При х=-2	$-24=8B$
При х=2	$40=8C,$

Откуда $A=2,\ B=-3,\ C=5$ *(прежний результат)*

Таким образом, в этом случае не приходится решать сложную систему уравнений со многими неизвестными.

2. Найти $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$

Решение. Подынтегральная функция есть правильная дробь. Разложим знаменатель этой дроби на простые множители: $x^3+5x^2+8x+4=\left(x+2\right)^2\left(x+1\right)$. Представляем данную дробь по формуле (3)

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_1}{x+2}+\frac{B}{x+1}$$

Домножив на $\left(x+2\right)^2\left(x+1\right)$, получаем

$$x^2 = A_2(x+1)+A(x+2)(x+1)+B(x+2)^2$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получаем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 1, \\ A_2 + 3A_1 + 4B_1 = 0, \\ A_2 + 2A_1 + 4B_1 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_2 = -4,\ A_1 = 0,\ B_1 = 1.$ Следовательно

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = -\frac{4}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+1}$$

С учетом этого:

$$\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)} = \int\left(-\frac{4}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{4}{x+2} + \ln|x+1| + C$$

3. Найти $\int \frac{4dx}{x^3 + 4x}$

Решение. $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$, следовательно по формуле (3)

$$\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

После домножения на $x\left(x^2+4\right)$ получаем:

$$4 = A(x^2+4) + x(Mx+N) = (A+M)x^2 + Nx + 4x$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему трех уравнений

$$\begin{cases} A + M = 0, \\ N = 0, \\ 4A = 4. \end{cases}$$, откуда $A = 1,\ M = -1,\ N = 0,$ так что $\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}$

Следовательно, $\int \frac{4dx}{x^3+4x} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+4} = \ln|x| - \ln\left|\sqrt{x^2+4}\right| + C$

4. Найти $\int \frac{dx}{(x^2+x)\cdot(x^2+1)}$

Решение. По формуле (4) $\frac{1}{x(x+1)\cdot(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$, откуда

$$1 = A(x+1)\cdot(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Mx+N)x(x+1) \tag{9}$$

При $x=0$, получим $A=1$, при $x=-1$ имеем $B=-\frac{1}{2}$, при $x=1$ с участием найденных значений, получим $M+N=-1$, при $x=-2$ имеем $-2M+N=\frac{1}{2}-$, и следовательно, $M=-\frac{1}{2}$, $N=-\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\frac{1}{x(x+1)\cdot(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+1} \text{ и}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+x)\cdot(x^2+1)}=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-$$
$$-\frac{1}{2}arctgx+C$$

Билет 3. Бимолекулярная реакция

Пример применения неопределенных интегралов в исследовании математических моделей химических реакций.

Закон действующих масс для тримолекулярной реакции гласит: скорость химической реакции пропорциональна концентрациям участвующих в ней реагентов,– и выражается следующей формулой:

$$\frac{dx}{dt}=k\left(a-x\right)\cdot\left(b-x\right)\cdot\left(c-x\right),$$

где x – концентрация продукта; a, b, c, – начальные концентрации реагентов.

Перепишем это равенство в виде:

$$\frac{dx}{\left(a-x\right)\cdot\left(b-x\right)\cdot\left(c-x\right)}=kdt\,. \qquad (1)$$

Представим при $a\neq b$, $a\neq c$, $b\neq c$ функцию $\frac{1}{\left(a-x\right)\cdot\left(b-x\right)\cdot\left(c-x\right)}$ в виде

$$\frac{1}{\left(a-x\right)\cdot\left(b-x\right)\cdot\left(c-x\right)}=\frac{A}{\left(a-x\right)}+\frac{B}{\left(b-x\right)}+\frac{C}{\left(c-x\right)}. \qquad (2)$$

Для этого можно привести правую часть этого равенства к общему знаменателю:

$$\frac{A}{\left(a-x\right)}+\frac{B}{\left(b-x\right)}+\frac{C}{\left(c-x\right)}=\frac{A\left(b-x\right)\cdot\left(c-x\right)+B\left(a-x\right)\cdot\left(c-x\right)+C\left(a-x\right)\cdot\left(b-x\right)}{\left(a-x\right)\cdot\left(b-x\right)\cdot\left(c-x\right)}=$$

$$\frac{\left(A+B+C\right)x^2-\left(A\left(b+c\right)+B\left(a+c\right)+C\left(a+b\right)\right)x+Abc+Bac+Cab}{\left(a-x\right)\cdot\left(b-x\right)\cdot\left(c-x\right)}.$$

Откуда $A=-\frac{1}{\left(a-b\right)\left(c-a\right)}$, $B=-\frac{1}{\left(a-b\right)\left(b-c\right)}$, $C=-\frac{1}{\left(b-c\right)\left(c-a\right)}$.

Согласно (1) и (2):

$$\int\frac{dx}{\left(a-x\right)\left(b-x\right)\left(c-x\right)}=-\frac{1}{\left(a-b\right)\left(c-a\right)}\int\frac{dx}{a-x}-\frac{1}{\left(a-b\right)\left(b-c\right)}\int\frac{dx}{b-x}-\frac{1}{\left(b-c\right)\left(c-a\right)}\int\frac{dx}{c-x}=$$

$$=\frac{1}{\left(a-b\right)\left(c-a\right)}\ln\left(a-x\right)+\frac{1}{\left(a-b\right)\left(b-c\right)}\ln\left(b-x\right)+\frac{1}{\left(b-c\right)\left(c-a\right)}\ln\left(c-x\right)+C_0$$

и, так как $\int kdt=kt+C_1$, получаем:

$$\frac{1}{\left(a-b\right)\left(c-a\right)}\ln\left(a-x\right)+\frac{1}{\left(a-b\right)\left(b-c\right)}\ln\left(b-x\right)+\frac{1}{\left(b-c\right)\left(c-a\right)}\ln\left(c-x\right)=kt+const$$

Билет 4. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы. Интегрирование выражений $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$

4.1. Интегрирование рациональных выражений

Выше мы уже научились интегрировать рациональные дифференциалы. В дальнейшем основным приемом интегрирования тех или иных классов дифференциальных выражений будет поиск таких подстановок $t = \omega(x)$, которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду и дали бы возможность представить интеграл в виде функции от t . Если при этом сама функция $\omega(x)$, которую надлежит подставить вместо t, выражается через элементарные функции, то интеграл представится в виде функции от x .

Назовем этот прием методом рационального подынтегрального выражения. В качестве первого примера его применения рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) \qquad (1)$$

R означает рациональную функцию от двух аргументов, m - натуральное число, а $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ - постоянные.

Пусть: $$t=\omega(x)=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\ t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\ x=\varphi(t)=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}.$$

Интеграл перейдет в $\int R(\varphi(t),t)\varphi'(t)dt$;

Здесь дифференциал имеет уже рациональный вид, так как R , φ , φ' - рациональные функции. Вычислив этот интеграл по правилу из билета 2, к старой переменной вернемся, подставив $t = \omega(x)$.

К интегралу вида (1) сводятся и более общие интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s, \ldots\right)dx,$$

где все показатели $r, s, \ldots$ рациональны; стоит лишь привести эти показатели к общему знаменателю m , чтобы под знаком интеграла получить рациональную функцию x от радикала $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$.

Примеры.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$.

Здесь дробно-линейная функция $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ свелась просто к линейной функции. Пусть $t=\sqrt{x+1}$, $dx=2tdt$; тогда

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int\frac{t+2}{t^3-1}dt = \int\left(\frac{2}{t-1}-\frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)dt = \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}-\frac{2}{\sqrt3}arctg\,\frac{2t+1}{\sqrt3}+C$$

где остается лишь подставить $t=\sqrt{x+1}$.

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}$.

Пусть $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, $x=\dfrac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx=-\dfrac{6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}$; тогда

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}=\int\frac{-3dt}{t^3-1}=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=\frac12\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt3 arctg\,\frac{2t-1}{\sqrt3}+C,$$

где $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$

4.2. Интегрирование биноминальных дифференциалов

Биноминальным называется дифференциал вида:

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,$$

где a, b – любые показатели m, n, p – рациональные числа. Выясним случаи, когда эти выражения интегрируемы.

Один такой случай ясен непосредственно: если р – число целое (положительное, нуль или отрицательное), то рассматриваемое выражение относится к типу, изученному в предыдущем пункте. Именно, если через λ обозначить наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n, то мы имеем здесь выражение вида $R\left(\sqrt[\lambda]{x}\right)dx$, так что для его представления в виде рационального выражения достаточна подстановка $t=\sqrt[\lambda]{x}$.

Преобразуем теперь данное выражение подстановкой $z=x^n$

Тогда $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \dfrac{1}{n}\left(a+bz\right)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}$ и, предположив для краткости $\dfrac{m+1}{n}-1=q$, будем иметь:

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \frac{1}{n}\int\left(a+bz\right)^p z^q dz. \qquad (2)$$

Если q – число целое, то мы приходим к выражению уже изученного типа. Действительно, если обозначить через ν знаменатель дроби p, то преобразованное выражение имеет вид $R\left(z, \sqrt[\nu]{a+bz}\right)$. Рационализации подынтегрального выражения можно достигнуть и сразу – подстановкой:

$$t=\sqrt[\nu]{a+bz}=\sqrt[\nu]{a+bx^n}.$$

Наконец, перепишем $\int\left(a+bz\right)^p z^q dz$ в виде $\int\left(\dfrac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q} dz$.

Легко увидеть, что при $p+q$ целом мы также имеем изученный случай: преобразованное выражение имеет вид $R\left(z, \sqrt[\nu]{\dfrac{a+bz}{z}}\right)$. Подынтегральное выражение в данном интеграле рационализируется и сразу подстановкой $t=\sqrt{\dfrac{a+bz}{z}}=\sqrt{ax^{-n}+b}$

Таким образом, оба интеграла в формуле (2) выражаются в конечном виде, если оказывается целым одно из чисел: $p,\ q,\ p+q$; или одно из чисел: $p,\ \dfrac{m+1}{n},\ \dfrac{m+1}{n}+p.$

Эти случаи интегрируемости были известны ещё Ньютону. Однако лишь в середине прошлого столетия П.Л. Чебышев установил замечательный факт, что других случаев интегрируемости для биноминальных дифференциалов нет.

Рассмотрим пример:

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx.$$

Здесь $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{4}$, $p=\dfrac{1}{3}$; так как $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2,$ то имеем второй случай интегрируемости. Заметив, что $\nu=3$, положим (по общему правилу)

$$t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}},\ x=\left(t^3-1\right)^4,\ dx=12t^2\left(t^3-1\right)^3 dt;$$

тогда $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int\left(t^6-t^3\right)dt=\frac{3}{7}t^4\left(4t^3-7\right)+C$ и т.д.

4.3. Интегрирование выражений вида $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. Подстановки Эйлера

Переходим к рассмотрению очень важного класса интегралов $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Предполагаем, что квадратный трёхчлен не имеет одинаковых корней, так что корень из него может быть заменён рациональным выражением. Мы изучим подстановку, называемую подстановкой Эйлера (L. Euler), с помощью которой можно достигнуть здесь рационализации такого подынтегрального выражения.

Подстановка применима в случае, если $a>0$. Тогда полагают, что:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x \tag{3}$$

Возведём это равенство в квадрат и приведём подобные слагаемые в обеих частях. Получим $x=\dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$. Подставим *x* в формулу (3):

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}=\frac{t\cdot\left(2\sqrt{a}t+b\right)-\sqrt{a}\cdot\left(t^2-c\right)}{2\sqrt{a}t+b}=\frac{2\sqrt{a}t^2+bt-\sqrt{a}t^2+\sqrt{c}a}{2\sqrt{a}t+b}=$$
$$=\frac{2\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{c}a}{2\sqrt{a}t+b}$$

И $dx=2\dfrac{\sqrt{a}t+bt+\sqrt{c}a}{\left(2\sqrt{a}t+b\right)^2}dt$

Всё остроумие эйлеровой подстановки именно в том, что для определения x получается уравнение первой степени , так что x, а одновременно с ним также и радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$ выражаются рационально через *t*: $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x$.

4.4. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрическую и показательную функции. Интегрирование дифференциалов $R\left(\sin x,\cos x\right)dx$

Дифференциалы вида $R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ всегда могут быть рационализированы подстановкой $t=tg\dfrac{x}{2}\left(-\pi<x<\pi\right)$. Действительно,

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ x=2arctgt,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

так что:

$$R(\sin x,\cos x)dx=R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом, интегралы типа $\int R(\sin x,\cos x)dx$ всегда берутся в конечном виде; для их выражения, кроме функций, встречающихся при интегрировании рациональных дифференциалов, нужны лишь её тригонометрические функции.

Упомянутая подстановка, являющаяся универсальной для интеграла определенного типа, приводит иной раз к сложным выкладкам. Ниже указаны случаи, когда цель может быть достигнута с помощью более простых подстановок. Предварительно сделаем следующие элементарные замечания из области алгебры:

Если целая или дробная рациональная функция $R(u,\upsilon)$ не меняет своего значения при изменении знака одного из аргументов, например, u (т.е. если $R(-u,\upsilon)=R(u,\upsilon)$), то она может быть приведена к виду $R(u,\upsilon)=R_1(u^2,\upsilon)$, содержащему лишь чётные степени u.

Если же, наоборот, при изменении знака u функция $R(u,\upsilon)$ также меняет знак (т.е. если $R(-u,\upsilon)=-R(u,\upsilon)$), то она приводится к виду $R(u,\upsilon)=R_2(u^2,\upsilon)u$;

Это сразу вытекает из предыдущего замечания, если его применить к функции $\frac{R(u,\upsilon)}{u}$.

I. Пусть $R(u,\upsilon)$ меняет знак при изменении знака u;
Тогда:
$$R(\sin x,\cos x)dx=R_0(\sin^2 x,\cos x)\sin xdx=-R_0(1-\cos^2 x,\cos x)d\cos x,$$
и рационализация достигается подстановкой $t=\cos x$.

II. Если $R(u,\upsilon)$ меняет знак при изменении знака υ, то
$R(\sin x,\cos x)dx=R_0^*(\sin x,\cos^2 x)\cos xdx=-R_0^*(\sin x,1-\sin^2 x)d\sin x$, и здесь целесообразна подстановка $t=\sin x$.

III. Предположим наконец, что функция $R(u,\upsilon)$ не меняет своего значения при одновременном изменении знаков u и υ:
$$R(-u,-\upsilon)=R(u,\upsilon).$$

В этом случае, заменяя u на $\frac{u}{\upsilon}\upsilon$, будем иметь $R(u,\upsilon)=R\left(\frac{u}{\upsilon}\upsilon,\upsilon\right)=R^*\left(\frac{u}{\upsilon},\upsilon\right)$. По свойству функции R, если изменить знаки u и υ (отношение $\frac{u}{\upsilon}$ при этом не изменится), $R^*\left(\frac{u}{\upsilon},-\upsilon\right)=R^*\left(\frac{u}{\upsilon},\upsilon\right)$, а тогда, как мы знаем, $R^*\left(\frac{u}{\upsilon},\upsilon\right)=R_1^*\left(\frac{u}{\upsilon},\upsilon^2\right)$

Поэтому. $R(\sin x,\cos x)=R^*\left(tgx,\cos^2 x\right)=R_1^*\left(tgx,\frac{1}{1+tg^2x}\right)$, т.е. $R(\sin x,\cos x)=\tilde{R}(tgx)$.

Здесь достигает цели подстановка $t=tgx\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$, ибо $R(\sin x,\cos x)=\tilde{R}(t)\frac{dt}{1+t^2}$.

Замечание. *Нужно сказать, что каково бы ни было рациональное выражение* $R(u,\upsilon)$, *его всегда можно представить в виде суммы трёх выражений рассмотренных выше частных типов. Например, можно предположить*

$$R(u,\upsilon)=\frac{R(u,\upsilon)-R(-u,\upsilon)}{2}+\frac{R(-u,\upsilon)-R(-u,-\upsilon)}{2}+\frac{R(-u,-\upsilon)+R(u,\upsilon)}{2}$$

Первое из этих выражений меняет знак при изменении знака u, *второе меняет знак при изменении знака* υ, *а третье сохраняет значение при одновременном изменении знака* u *и* υ. *Разбив выражение* $R(\sin x,\cos x)$ *на соответствующие слагаемые, можно к первому из них применить подстановку* $t=\cos x$, *ко второму подстановку -* $t=\sin x$ *и, наконец, к третьему – подстановку* $t=tgx$ *типа. Таким образом, для вычисления интегралов типа (1) достаточно этих трёх подстановок.*

Для вычисления интегралов $\int\sin ax\cos bx dx$, $\int\sin ax\sin bx dx$, $\int\cos ax\cos bx dx$ используются формулы

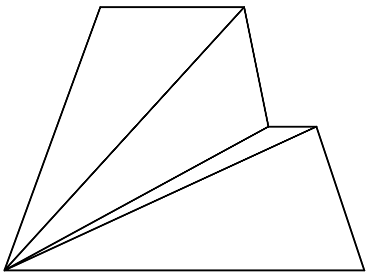
- $\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\right)$,
- $\sin ax\sin bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right)$,
- $\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x+\cos(a+b)x\right)$.

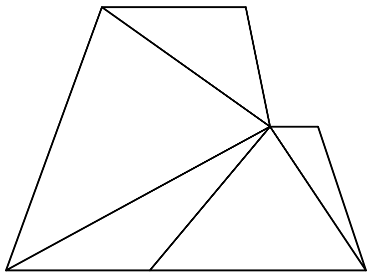
Билет 5. Площадь плоской фигуры.

5.1. Площадь фигуры

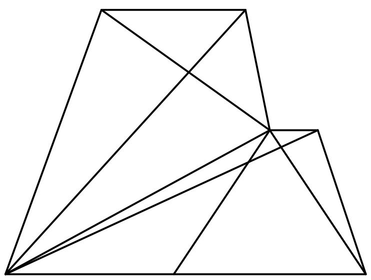
В этом пункте мы дадим определение понятия «площадь фигуры». Задача о вычислении площади плоской фигуры, ограниченной кривыми линиями, является весьма актуальной. Отправной точкой считается понятие площадь треугольника. Это понятие считается известным. Для того, чтобы определить площадь многоугольника, разобьём его на треугольники, вычислим площади этих треугольников и просуммируем их. Следует доказать корректность этого определения. Это означает, что если разбить многоугольник на треугольники другим способом, то его площадь от этого не измениться. Докажем это.

►Возьмем два разбиения многоугольника на треугольники:





Построим общее разбиение:



Получится разбиение многоугольников, которые можно «доразбить» до треугольников.

Тогда площади частей как 1-го, так и 2-го разбиения получаются, как суммы площадей маленьких треугольников из результирующего разбиения. Поэтому суммы частей 1-го и 2-го разбиения.◄

Площадь многоугольника обладает следующими свойствами:

1. Площадь любого многоугольника неотрицательна;
2. Если A, B - многоугольники, то $S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$,в частности, если $S(A\cup B)=0$, то $S(A\cup B)=S(A)+S(B)$. Это свойство называется аддитивностью площади. Из него следует, что если $A\subset B$, то $S(A)\le S(B)$.

Пусть теперь P - ограниченная плоская фигура. Рассмотрим множество $\{A\}$ многоугольников таких, что $A\subset P$ и множество $\{B\}$ многоугольников таких, что $P\subset B$.

Множество площадей $\{S(A)\}$ многоугольников $A \subset P$ ограничено сверху площадью любого многоугольника B такого, что $P \subset B$. Поэтому существует точная верхняя грань этого числового множества, $\sup\limits_{A \subset P}\{S(A)\}$.

Аналогично, для множества площадей $\{S(B)\}$многоугольников B, $P \subset B$, существует точная нижняя грань $\inf\limits_{P \subset B}\{S(B)\}$.

Определение 5.1. Плоская фигура Р называется ***имеющей площадь (квадрируемым множеством)***, если:

$$\sup_{A \subset B}\{S(A)\} = \inf_{P \subset B}\{S(B)\} = S(P),$$

при этом общее значение этих величин называется её ***площадью*** $S(P)$.

Нетрудно заметить, что:

1. Площадь любой квадрируемой фигуры Р неотрицательна, т.к., по определению $пл.(P) = \inf\{пл.(B)\}$, а все $S(B) \geq 0$.

2. Аддитивность площади, т.е. равенство $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2) - S(P_1 \cap P_2)$ также имеет место для квадрируемых фигур P_1, P_2.

►Докажем это равенство в случае, когда $S(P_1 \cap P_2) = 0$

Пусть $\varepsilon > 0.$ Выберем многоугольники $A_i, B_i, i = 1,2,$ так, чтобы $A_i \subset P_i \subset B_i$, $S(P_1) - S(A_i) < \dfrac{\varepsilon}{4}$, $S(B_i) - S(P_i) < \dfrac{\varepsilon}{4}$ Тогда $A_1 \cup A_2 \subset P_1 \cup P_2 \subset B_1 \cup B_2$ и $A_1 \cap A_2 \subset P_1 \cap P_2$, откуда $S(A_1 \cap A_2) \leq S(P_1 \cap P_2) = 0,$ т.е. $S(A_1 \cap A_2) = 0.$

Следовательно,

$$S(A_1 \cup A_2) = S(A_1) + S(A_2) > S(P_1) + S(P_2) - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = S(P_1) + S(P_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$S(B_1 \cup B_2) \leq S(B_1) + S(B_2) < S(P_1) + S(P_2) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = S(P_1) + S(P_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому:

$$S(P_1) + S(P_2) - \frac{\varepsilon}{2} < S(A_1 \cup A_2) \leq S(B_1 \cup B_2) \leq S(B_1) + S(B_2) < S(P_1) +$$

$$+ S(P_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0,$ это означает, что $P_1 \cup P_2$ имеет площадь, и $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2),$ что и требовалось доказать. ◄

Теорема 5.1. **Пусть P- плоская фигура, {R}- множество квадрируемых фигур $R, R \subset P, \{Q\}$ - множество квадрируемых фигур и если $\sup\limits_{R \subset P}\{S(R)\} = \inf\limits_{P \subset Q}\{S(Q)\}$, то P- квадрируемая фигура, причем её площадь равна общему значению этих величин.**

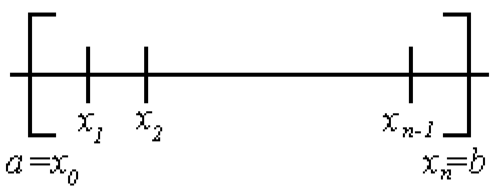
►Для доказательства достаточно для произвольного $\varepsilon > 0$ выбрать сначала квадрируемые фигуры $R,\ Q$ так, чтобы $R \subset P \subset Q$ и $S(Q) - S(R) < \frac{\varepsilon}{2}$. Затем выберем многоугольники A *и* B, $A \subset R \subset P \subset Q \subset B$ так, что $S(R) - S(A) < \frac{\varepsilon}{4}$, $S(B) - S(Q) < \frac{\varepsilon}{4}$, тогда $S(B) - S(A) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Таким образом, для фигуры P можно выбрать многоугольники A и B так, что $A < P < B$ и площади A и B столь угодно близки, что и означает квадрируемость P.◄

5.2. Определение интеграла.

Для дальнейшего потребуется понятие разбиения отрезка.

Определение 5.2. Точки $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ задают ***разбиение*** отрезка $[a;b]$. Для краткости будем обозначать разбиение буквой T.



Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0,1,\ldots,n-1.$

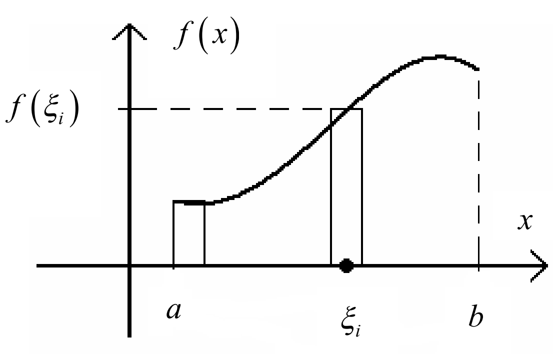
Определение 5.3. Наибольшее из чисел $\Delta x_i, i = 0,1,\ldots,n-1$ называется ***диаметром*** разбиения T и обозначается $d(T)$.

Определение 5.4. Если произвольным образом выбрать точки $\zeta_i, \zeta_i \in [x_i; x_{i+1}], i = 0,1,\ldots,n-1$, то получится ***разбиение*** T ***с отмеченными точками*** $\zeta_i, i = 0,1,\ldots,n-1$.

Иногда, для краткости, будем обозначать набор точек $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ символом $\overline{\zeta}$.

Определение 5.5. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, и пусть задано разбиение T этого отрезка с отмеченными точками $\overline{\zeta}$. ***Интегральной суммой*** называется величина $\sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)\Delta x_i$.

Для обозначения интегральной суммы будем использовать символ $\sigma(f(x), T, \overline{\zeta})$, или просто σ.



Для неотрицательной функции $f(x)$ интегральная сумма $\sigma(f(x), T, \overline{\zeta})$ представляет собой просто площадь ступенчатого многоугольника, составленного из прямоугольников с основаниями Δx_i, имеющих высоты, равные $f(\zeta_i)$.

Определение 5.6. Пусть существует число $I \in R$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T отрезка $[a;b]$, удовлетворяющего условию $d(T) < \delta$, и для любого выбора точек $\overline{\zeta}$ выполняется неравенство $\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$. Тогда функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a;b]$, а число I называется ее ***интегралом*** по отрезку $[a;b]$. Интеграл обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$.

Интеграл – одно из важнейших понятий математического анализа, имеющее многочисленные приложения к практическим задачам. Именно с помощью этого понятия удастся решить задачу о площади фигуры, ограниченной кривыми линиями.

5.3. Необходимое условие существования интеграла.

Теорема 5.2. **Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на $[a;b]$.**

►Возьмем в определении интеграла $\varepsilon = 1$ и рассмотрим соответствующее ему δ. Пусть T – любое разбиение, удовлетворяющее условию $d(T) < \delta$. Для того, чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно доказать, что при всех j, $(j = 0,1,\ldots,n-1)$ функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[x_j;x_{j+1}]$, т.е. $|f(x)| \le M_j$. Действительно, тогда для $M = \max(M_0,\ldots,M_{n-1})$ имеем при $x \in [a;b]$: $|f(x) \le M|$, т.к. x входит в некоторый отрезок $[x_j;x_{j+1}]$ и, значит $|f(x)| \le M_j \le M$.

Выберем любое j, $(j = 0,1,\ldots,n-1)$ и представим интегральную сумму $\sigma(f,T,\{\overline{\xi}\})$ в виде:

$$\sum_{i=0}^{j-1} f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_j)\Delta x_j + \sum_{i=j+1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

Зафиксируем произвольным образом числа ξ_0, ξ_{j-1}, ξ_{j+1}, ξ_{n-1} выбранные в соответствующих промежутках. При этом первое и третье слагаемые в равенстве (1) примут определенное фиксированное значение. Обозначим сумму этих слагаемых буквой J. Таким образом, при любом $\xi_j \in [x_j;x_{j+1}]$:

$$\sigma(f,T,\{\overline{\xi}\}) = J + f(\xi_j)\Delta x_j \qquad (2)$$

По условию, функция интегрируема, значит $|\sigma(f,T,\{\overline{\xi}\}) - I| < 1$, т.е. $-1 < \sigma(f,T,\{\overline{\xi}\}) - I < 1$, или $I - 1 < \sigma(f,T,\{\overline{\xi}\}) < I + 1$, откуда, учитывая (2):
$I - 1 < J + f(\xi_j)\Delta x_j < I + 1$, $I - J - 1 < f(\xi_j)\Delta x_j < I - J + 1$,

$$\frac{I - J - 1}{\Delta x_j} < f(\xi_j) < \frac{I - J + 1}{\Delta x_j} \qquad (3)$$

Левая и правая части неравенства (3) представляют собой величины, не зависящие от ξ_j. Поэтому неравенство (3) означает, что $|f(\xi_j)| < \max\left(\left|\frac{I-J-1}{\Delta x_j}\right|, \left|\frac{I-J+1}{\Delta x_j}\right|\right) = M_j$. ◄

Билет 6.Суммы Дарбу и их свойства

При исследовании вопроса о существовании интеграла важную роль играют суммы Дарбу (Г. Дарбу (1842–1917)).

По доказанной в <u>*пункте 2 билета 5*</u> теореме $f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и, следовательно, для любого разбиения T отрезка она ограничена на всех отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ (т.е. множество её значений на этом отрезке ограничено сверху и снизу). Обозначим M_i – точную верхнюю грань, а m_i – точную нижнюю грань множества значений функции $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1.$

<u>Определение 6.1.</u> Числа $S(T) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ и $s(T) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$ называются, соответственно, ***верхней*** и ***нижней суммами Дарбу*** функции $f(x)$ для разбиения T на отрезке $[a,b]$.

<u>Теорема 6.1.</u> **Верхняя сумма Дарбу $S(T)$ представляет собой точную верхнюю грань, а нижняя сумма Дарбу $s(T)$ – точную нижнюю грань множества значений интегральных сумм при заданном разбиении T и всевозможных выборах точек $\{\xi\}$.**

► Проведем его для верхней суммы Дарбу. Для нижней суммы рассуждения аналогичные.

Во-первых, для любого i и для любой точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ имеет место неравенство $f(\xi_i) \le M_i$ (по определению M_i). Значит,

$$f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i \quad i = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1. \tag{1}$$

Суммируя неравенства (1) по всем $i = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1,$ получаем:

$\sigma\left(f, T, \{\overline{\xi}\}\right) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = S(T).$ То есть $S(T)$ — верхняя грань множества $\sigma\left(f, T, \{\overline{\xi}\}\right)$ по всевозможным выборам $\{\overline{\xi}\}$.

Осталось доказать, что $S(T)$ — ***точная*** верхняя грань. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку M_i — точная верхняя грань множества значений $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1$ существует точка $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ такая, что

$f(\xi_i) > M_i - \dfrac{\varepsilon}{b-a},\ i = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1$ и

$$f(\xi_i)\Delta x_i > M_i \Delta x_i - \frac{\varepsilon \Delta x_i}{b-a},\ i = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1. \tag{2}$$

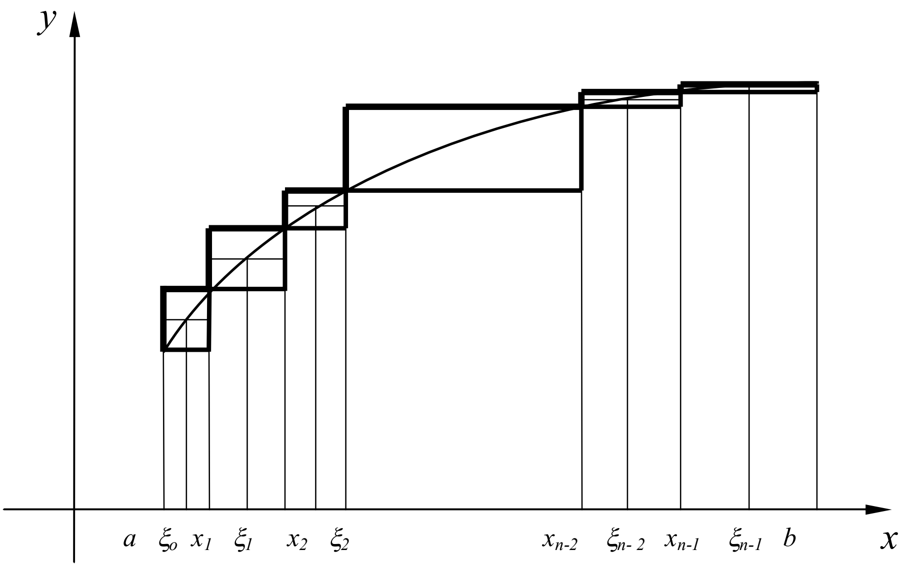
Суммируя неравенства (2) по $i = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1,$ получаем, что

$$\sigma\left(f,T,\left\{\overline{\xi}\right\}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i>\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon\Delta x_i}{b-a}=S\left(T\right)-\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i=S\left(T\right)-\varepsilon,$$

т.к. $\sum_{i-0}^{n-1}\Delta x_i=b-a$ (суммарная длина отрезков, составляющих отрезок $\left[a;b\right]$, равна длине этого отрезка).

Итак, доказано, что для любого $\varepsilon>0$ можно так выбрать точки ξ_0, ..., ξ_{n-1}, что $\sigma\left(f,T,\left\{\overline{\xi}\right\}\right)>S\left(T\right)-\varepsilon$, что как раз, и означает, что $S\left(T\right)=\sup\left\{\sigma\left(f,T,\left\{\overline{\xi}\right\}\right)\right\}$, где верхняя грань взята по всевозможным выборам точек ξ_0, ..., ξ_{n-1},. Теорема доказана.◄

Замечание. *Очевидны неравенства:* $s\left(T\right)\le\sigma\left(f,T,\left\{\overline{\xi}\right\}\right)\le S\left(T\right)$.

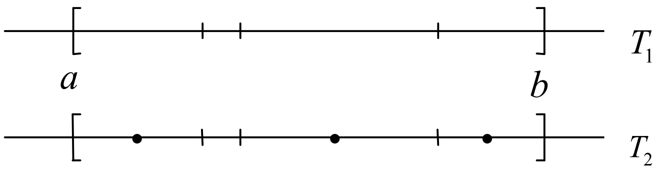


Заметим, что нижняя сумма Дарбу, соответствующая разбиению $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$, *представляет собой площадь многоугольника, верхняя граница которого на рисунке есть нижняя ломаная, отмеченная жирной линией.*

Верхняя сумма Дарбу — это площадь многоугольника, верхняя граница которого — верхняя из 3 ломаных линий, отмечена еще более жирной линией.

Наконец, интегральная сумма, соответствующая выбору точек ξ_0, ..., ξ_{n-1}, *— это площадь многоугольника, верхняя граница которого на рисунке заключена между описанными выше линиями и изображена простой линией.*

Определение 6.2. Разбиение T_2 отрезка $[a,b]$ называется ***продолжением*** разбиения T_1 (или ***измельчением***), если оно получено присоединением к T_1 новых точек деления.



Теорема 6.2.

1. Если T_2 продолжает T_1, то $s(T_1)\le s(T_2),\ S(T_1)\ge S(T_2).$ (3)

2. Для любых разбиений T_1 и T_2 имеет место неравенство: $s(T_1)\le S(T_2).$ (4)

► Сначала докажем неравенства (3) в случае, когда T_2 получено присоединением к T_1 одной новой точки. Пусть эта точка, обозначим её x', попала в интервал $x_i < x' < x_{i+1}$. Рассмотрим суммы Дарбу, соответствующие старому разбиению и новому разбиению.

Поскольку остальные отрезки старого разбиения остались без изменения, соответствующие им слагаемые сумм Дарбу не изменятся. Поэтому различие старой и новой суммы Дарбу только в том, что:

1. для верхней суммы Дарбу слагаемое $M_i\Delta x_i$ заменяется на сумму $M_i'(x'-x_i)+M_i''(x_{i+1}-x')$, где M_i' — точная верхняя грань множества значений $f(x)$ на $[x_i,x']$, M_i'' — на $[x',x_{i+1}]$;

2. для нижней суммы Дарбу слагаемое $m_i\Delta x_i$ заменяется суммой $m_i'(x'-x_i)+m_i''(x_{i+1}-x')$, где m_i', m_i'' — соответствующие точные нижние грани.

Очевидны неравенства: $M_i'\le M_i$, $M_i''\le M_i$, $m_i'\ge m_i$, $m_i''\ge m_i$ (точная верхняя грань множества значений $f(x)$ на ***части*** отрезка не превосходит точной верхней грани множества значений $f(x)$ на ***всем*** отрезке, а точная нижняя грань множества значений $f(x)$ на части отрезка не меньше, чем точная нижняя грань множества значений $f(x)$ на всем отрезке).

Поэтому

$$S(T_1)-S(T_2)=M_i\Delta x_i-M_i'(x'-x_i)-M_i''(x_{i+1}-x')=M_i\big((x'-x_i)+(x_{i+1}-x')\big)-M_i'(x'-x_i)-M_i''(x_{i+1}-x')=$$
$$=(M_i-M_i')(x'-x_i)+(M_i-M_i'')(x_{i+1}-x')\ge 0,\ \text{т.к.}\ M_i>M_i',\ M_i>M_i'',\ x'>x_i,\ x_{i+1}>x'.$$

Аналогично, $s(T_2)-s(T_1)=m_i'(x'-x_i)+m_i''(x_{i+1}-x')-m_i(x_{i+1}-x_i)=$

$$=m_i'(x'-x_i)+m_i''(x_{i+1}-x')-m_i\big((x_{i+1}-x')+(x'-x_i)\big)=(m_i'-m_i)(x'-x_i)+(m_i''-m_i)(x_{i+1}-x')\ge 0,$$
$\text{т. к.}\ m_i'\ge m_i,\ m_i''\ge m_i,\ x'>x_i,\ x_{i+1}>x'.$

Итак, первое утверждение теоремы доказано в случае, когда T_2 получено из T_1 добавлением одной новой точки.

Если же таких новых точек — несколько, то мы можем рассматривать T_2 как результат последовательного присоединения по ***одной*** точке. При этом, по доказанному выше, при каждом таком присоединении точки верхняя сумма Дарбу не увеличивается. Значит, $S(T_2) \le S(T_1)$ и в общем случае. Аналогичное рассуждение справедливо и для нижних сумм.

Поэтому первое утверждение теоремы доказано.

Докажем утверждение 2. Неравенство (4) легко следует из первой части теоремы. Действительно, рассмотрим разбиение T_3, которое получается, когда мы берем все точки, входящие в T_1, и все точки, входящие в T_2. Тогда T_3 — продолжение T_1 и T_2. Но тогда $s(T_1) \le s(T_3) \le S(T_3) \le S(T_2)$. Первое и последнее неравенства следуют из доказанной первой части теоремы, среднее неравенство очевидно. ◄

Билет 7. Критерий интегрируемости.

Теорема 7.1.: **Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех разбиений T, удовлетворяющих условию $d(T)<\delta$, выполнялось неравенство:** $S(T)-s(T)<\varepsilon$ (1)

►***Необходимость.***

Для числа $\frac{\varepsilon}{3}$ выберем δ так, чтобы $\forall T,\ d(T)\ \forall\{\xi\}\ \left|\sigma\left(f,T,\{\xi\}\right)-I\right|<\frac{\varepsilon}{3},\ \forall T$, что можно сделать ввиду интегрируемости $f(x)$ на $[a;b]$. Тогда $-\frac{\varepsilon}{3}<\sigma\left(f,T,\{\xi\}\right)-I<\frac{\varepsilon}{3}$, $I-\frac{\varepsilon}{3}<\sigma\left(f,T,\{\xi\}\right)<\frac{\varepsilon}{3}+I$ для любого выбора $\{\xi\}$. Значит, число $\frac{\varepsilon}{3}+I$ - верхняя грань множества значений $\sigma\left(f,T,\{\xi\}\right)$ при всевозможных выборах $\{\xi\}$.

Значит, $S(T)\le\frac{\varepsilon}{3}+I$, поскольку по доказанной теореме 6.1, $S(T)$ - точная верхняя грань этого множества, а точная верхняя грань является наименьшей из верхних граней и не может превосходить числа $\frac{\varepsilon}{3}+I$. Аналогично $s(T)\ge I-\frac{\varepsilon}{3}$. Поэтому $S(T)-s(T)\le I+\frac{\varepsilon}{3}-\left(I-\frac{\varepsilon}{3}\right)=\frac{2}{\varepsilon}<\varepsilon$. Неравенство (1) доказано.

Достаточность.

Поскольку для любых T_1, T_2 выполняется неравенство:

$$s(T_1)\le s(T_2) \qquad (2),$$

множество $\{s(T)\}$ значений $s(T)$ при всевозможных разбиениях T отрезка $[a;b]$ ограничено сверху (любым числом вида $S(T)$). Аналогично множество $\{S(T)\}$ ограничено снизу. Поэтому существуют $I_{\bullet}=\sup\{s(T)\}, I^{\bullet}=\inf\{S(T)\}$. Из неравенства (2) сразу следует, что $I^{\bullet}-I_{\bullet}\ge 0$.

Покажем сначала, что из (1) следует, что $I^{\bullet}=I_{\bullet}$. Действительно, $S(T)\ge I^{\bullet}$, $s(T)\le I_{\bullet}$ и $I^{\bullet}-I_{\bullet}\le S(T)-s(T)<\varepsilon$. Значит, ввиду произвольности ε, $I^{\bullet}=I^{\bullet}$. Обозначим $I=I^{\bullet}=I_{\bullet}$.

Далее, $s(T)-S(T)\le\sigma\left(f,T,\{\xi\}\right)-I\le S(T)-s(T)$, или $\left|\sigma\left(f,T,\{\xi\}-I\right)\right|\le S(T)-s(T)<\varepsilon$ согласно (1). Поэтому $f(x)$ - интегрируема на $[a;b]$. Теорема доказана.◄

Замечание 1. Часто используется обозначение $\omega_i = M_i - m_i$. Величину ω_i называют колебанием $f(x)$ на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$.

Неравенство (1) можно переписать в виде $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

Замечание 2. В доказательстве теоремы установлены равенства $I = I^{\boldsymbol{\cdot}} = I_{\boldsymbol{\cdot}}$, означающие, что $\sup\limits_T \{s(T)\} = \inf\limits_T \{S(T)\} = \int\limits_a^b f(x)$, где точная нижняя и верхняя грани взяты со всевозможными разбиениями T отрезка $[a;b]$.

Замечание 3. Докажем, что существует неинтегрируемые ограниченные функции. В качестве примера рассмотрим *функцию Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 1, \textit{ если } x - \textit{рациональное число}, \\ 0, \textit{ если } x - \textit{иррациональное число} \end{cases}$$

Для любого разбиения T отрезка $[a;b]$ выполняются равенства:

1) $S(T) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a,$

2) $s(T) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0,$

поэтому для всех разбиений T имеем $S(T) - s(T) = b - a$, и требование критерия интегрируемости не выполняется.

Простым следствием доказанного критерия является монотонность функции.

<u>Теорема 7.2.</u> **Если $f(x)$ не убывает (не возрастает) на $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$.**

►**Доказательство** Пусть $f(x)$ не убывает. Тогда на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ выполняются равенства: $m_i = f(x_i)$, $M_i = f(x_{i+1})$. Если $f(b) = f(a)$, то $f(x)$ - постоянная и ее интегрируемость очевидна $\big(S(T) = s(T)\big)$.Если $f(b) > f(a)$, то положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Тогда если $\Delta x_i < \delta$, то:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \le \delta \cdot \sum_{i=0}^{n-1} M_i - m_i = \delta \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i) = \delta\big(f(x_n) - f(x_0)\big) = \delta\big(f(b) - f(a)\big) = \varepsilon. \ ◄$$

7.1. Интегрируемость непрерывной функции. Площадь криволинейной трапеции

***<u>Теорема 7.3</u>*. Если $f(x) \in C[a;b]$, то $f(x)$ — интегрируема на $[a;b]$.**

►**Доказательство** По теореме Кантора, $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a;b]$, т.е. $\forall \varepsilon > o\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'':\ |x' - x''| < \delta\ |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

Рассмотрим разбиение T отрезка $[a;b]$ с диаметром меньшим, чем выбранное δ. Тогда на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ имеет место неравенство:

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (3).$$

Действительно, достаточно подобрать точку x' так, что:

$$M_i - f(x') < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \qquad (4)$$

и точку x'' так, чтобы

$$f(x'') - m_i < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \qquad (5).$$

(Это можно сделать, т.к. числа M_i, m_i — ***точные*** грани множества значений).

Тогда ввиду (3), (4), (5): $M_i - m_i = M_i - f(x') + f(x') - f(x'') + f(x'') - m_i$, и

$$M_i - m_i \le |M_i - f(x')| + |f(x') + f(x'')| + |f(x'') - m_i| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} = \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Неравенство (3) доказано. Тогда

$$S(T) - s(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

То есть критерий интегрируемости выполняется.◄

Вернёмся к поставленной задаче нахождения площади фигуры, ограниченной кривыми линиями.

Теорема 7.4. **Пусть P — фигура, ограниченная снизу осью x, по бокам — отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b,\ a < b$, а сверху — графиком непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ (см. рис.1). Тогда P имеет площадь, причем**

$$пл.(P) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

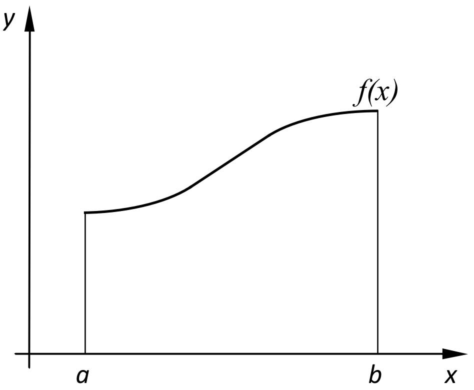


Рис. 1

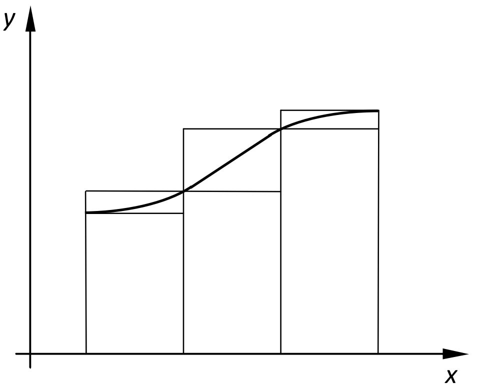


Рис. 2.

►**Доказательство** Для произвольного разбиения T отрезка $[a;b]$ нижняя сумма Дарбу $s(T)$ представляет собой площадь многоугольника $A,\ A \subset P,$ а верхняя сумма Дарбу — площадь многоугольника $B,\ B \supset P$ (рис. 2). Так как $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, она интегрируема на этом отрезке и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений T с диаметром $d(T) < \delta$ имеет место неравенство $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существуют многоугольники $A \subset P \subset B$ такие, что $пл.(B) - пл.(A) < \varepsilon.$ Это означает квадрируемость $P.$ Наконец, площадь P равна $\sup\limits_{A\subset P}\{пл.(A)\} = \inf\limits_{P\subset B}\{пл.(B)\}$ и $\inf\limits_{T} S(T) = \sup\limits_{T} s(T) = \int_a^b f(x)\,dx.$. Эти равенства означают, что $пл.(P) = \int_a^b f(x)\,dx.$ ◄

Следствие. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — ***непрерывные на*** $[a;b]$ ***функции***, причем для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f_1(x) \le f_2(x).$ Тогда ***площадь криволинейной трапеции***, ограниченной сверху графиком функции $y = f_2(x),$ снизу — графиком функции $y = f_1(x),$ а по бокам — отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 3) равна $\int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx.$

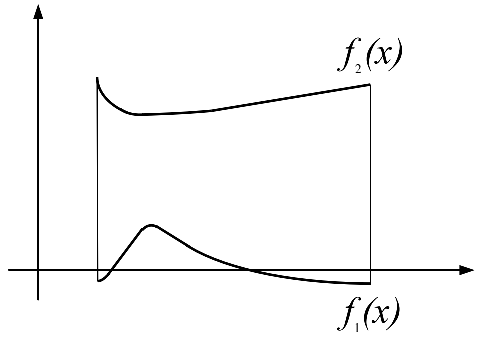
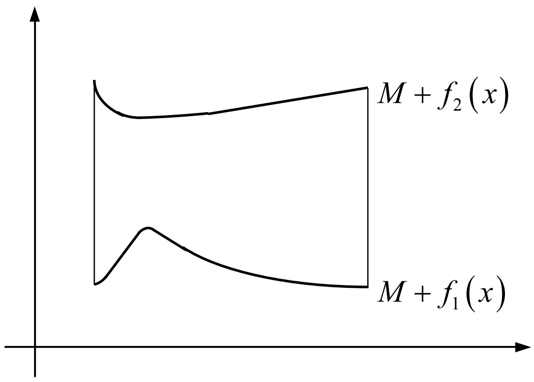


Рис. 3.

►**Доказательство** Т.к. $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны на $[a;b]$, они ограничены на этом отрезке. Поэтому существует число M такое, что $M + f_1(x) \geq 0$.



Тогда площадь рассматриваемой фигуры есть разность площадей криволинейных трапеций, и она есть

$$\int_a^b \left[M + f_2(x)\right]dx - \int_a^b \left[M + f_1(x)\right]dx =$$

$$\int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx,$$

что и требовалось доказать.◄

Условие непрерывности функции является достаточным, но не необходимым для её интегрируемости. В частности, имеет место

<u>Теорема 7.5.</u> **Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и имеет на нем конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.**

Ограничимся схемой доказательства.

►**Доказательство** Для любого разбиения T отрезка $[a;b]$ полученные отрезки $[x_i; x_{i+1}]$ либо содержат точку разрыва, либо не содержат. Количество отрезков, куда может входить точка разрыва, не превосходит удвоенного числа точек разрыва, так как точка разрыва может принадлежать одному отрезку (когда она не совпадает с точкой деления), либо двум отрезкам (когда она совпадает с точкой деления). По условию, функция $f(x)$ ограничена, поэтому существуют точная нижняя грань m и точная верхняя грань M множества её значений. Следовательно, колебание ω_i на любом отрезке, содержащем точку разрыва, не превосходит $M - m$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $d(T)$ столь малым, чтобы сумма величин $\omega_i \Delta x_i$ для отрезков, содержащих точки разрыва, стала меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Так же, как при доказательстве теоремы об интегрируемости непрерывной функции, можно доказать, что сумма величин $\omega_i \Delta x_i$ для отрезков, не содержащих точек разрыва, меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$., при достаточно малых значениях $d(T)$.

Но это означает, что при достаточно малых $d(T)$ вся сумма $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$ и теорема доказана.◄

Билет 8. Интегрируемость монотонной функции. Интегрируемость непрерывной функции.

Теорема 8.1. **Если $f(x) \in C[a;b]$, то $f(x)$ - интегрируема на $[a;b]$.**

►**Доказательство.** По теореме Кантора, $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a;b]$, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x', x'': \ |x'-x''| < \delta \ \ |f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (1).

Рассмотрим разбиение T отрезка $[a;b]$ с диаметром меньшим, чем выбранное δ. Тогда на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеет место неравенство:

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (2).$$

Действительно, достаточно подобрать точку x' так, что

$$M_i - f(x') < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \qquad (3)$$

и точку x'' так, чтобы

$$f(x'') - m_i < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \qquad (4).$$

(Это можно сделать, т.к. числа M_i, m_i - ***точные*** грани множества значений). Тогда ввиду (1), (3), (4) $M_i - m_i = M_i - f(x') + f(x') - f(x'') + f(x'') - m_i$, и
$M_i - m_i \le |M_i - f(x')| + |f(x') - f(x'')| + |f(x'') - m_i| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} = \ = \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Неравенство (2) доказано.

Тогда $S(T) - s(T) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \dfrac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$.
Т.о. критерий интегрируемости выполняется. Теорема доказана.◄

Теорема 8.2. **Если $f(x)$ не убывает (не возрастает) на $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$.**

►**Доказательство.** Пусть $f(x)$ не убывает. Тогда на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ выполняются равенства: $m_i = f(x_i), M_i = f(x_{i+1})$. Если $f(b) = f(a)$, то $f(x)$ - постоянная и ее интегрируемость очевидна ($S(T) \equiv s(T)$). Если $f(b) > f(a)$, то положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \qquad (5).$$

Тогда если $\Delta x_i < \delta$, то

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \delta \sum_{i=0}^{n-1} M_i - m_i = \delta \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i) = \delta(f(x_n) - f(x_0)) = \delta(f(b) - f(a)) = \varepsilon$$ ввиду (5).

Т.о., теорема доказана.◄

Билет 9.Свойства определённого интеграла.

Распространим определение интеграла на случай $a < b$.

Определение 9.1. Если $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \tag{1}$$

если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$.

Также по определению положим

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{2}$$

Заметим, что равенство (1) справедливо и в случае $a > b$, так как тогда $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, что равносильно равенству (1).

Это замечание, вместе с определением (2), означает, что равенство (1) выполняется при всех a и b.

Теорема 9.1. **Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, $a < b$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[c;d] \subset [a;b]$.**

►**Доказательство** Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[c;d]$ и проведем разбиение оставшихся частей отрезка $[a;b]$.

В итоге будет получено разбиение T отрезка $[a;b]$, причем точки c и d войдут в число точек деления этого разбиения.

Рассмотрим сумму $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$, соответствующую разбиению T отрезка $[a;b]$ и выделим часть этой суммы $\sum{}' \omega_i \Delta x_i$, соответствующую тем отрезкам разбиения, которые входят в $[c;d]$.

Так как $\omega_i \geq 0,\ \Delta x > 0$, а сумма $\sum{}' \omega_i \Delta x_i$ является частью суммы $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$, очевидно неравенство $\sum{}' \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$.

Поскольку за счет выбора диаметра разбиения величину $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$ можно сделать меньше любого заданного $\varepsilon > 0$, то же верно и для $\sum{}' \omega_i \Delta x_i$, что означает интегрируемость $f(x)$ на $[c;d]$.◄

Теорема 9.2. **Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$, $a<c<b$. Тогда она интегрируема и на отрезке $[a;b]$, причем**

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

►**Доказательство** По условию для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для разбиения отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$ с диаметром меньшим δ, выполняются неравенства $\sum\limits_{[a;c]}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}$, $\sum\limits_{[c;b]}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}$. Рассмотрим теперь произвольное разбиение T отрезка $[a;b]$. Если точка c попала в число точек деления, то сумма $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=\sum\limits_{[a;c]}\omega_i\Delta x_i+\sum\limits_{[c;b]}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$

Если же c не попала в число точек деления, то при некотором j, $0\le j\le n-1$, $c\in\left[x_j;x_{j+1}\right]$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{j-1}\omega_i\Delta x_i+\omega_j\Delta x_j+\sum_{i=j-1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i \tag{4}$$

Обе суммы стоящие в правой части (4), не превосходят, соответственно, $\sum\limits_{[a;c]}\omega_i\Delta x_i$ и $\sum\limits_{[c;b]}\omega_i\Delta x_i$.

Так как функция $f(x)$ ограничена на $[a;c]$ и $[c;b]$ она ограничена и на всем отрезке $[a;b]$. Пусть m и M соответственно, точная нижняя и точная верхняя грани её значения. Поэтому $\omega_i\le m\cdot M$.

Следовательно, при достаточно малом $d(T)$ все три величины $\sum\limits_{[a;c]}\omega_i\Delta x_i$, $\sum\limits_{[c;b]}\omega_i\Delta x_i$, и $\omega_j\Delta x_j$ меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, а с ними и величина $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$

Таким образом, $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$.

Равенство (3) сразу следует из равенства

$$\sum\nolimits_{[a;c]}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum\nolimits_{[c;b]}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\nolimits_{[a;b]}f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (5),$$

в котором в левой части стоят интегральные суммы, соответствующие произвольным разбиениям отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$, а в правой части – интегральная сумма, соответствующая разбиению отрезка $[a;b]$, среди точек деления которого есть точка c. При стремлении к 0 диаметра вышеупомянутого разбиения отрезка $[a;b]$ обе суммы, стоящие в левой части равенства, стремятся, соответственно, к интегралам $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, а так как мы доказали существование $\int_a^b f(x)dx$, то и правая часть равенства (5) стремиться к $\int_a^b f(x)dx$ ◄

Равенство (3) выражает свойство ***аддитивности*** *интеграла* по отрезку. Заметим, что это свойство, ввиду (1) останется верным при любом взаимном расположении $a,\ b,\ c$.

Свойство 9.1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то для любого числа k функция $kf(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (6)

Свойство 9.2. Если $f(x),\ g(x)$ - интегрируемы на $[a;b]$, то функция $f(x)+g(x)$ - интегрируема на $[a;b]$ и $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (7)

Доказательство свойств 9.1. и 9.2.

►**Доказательство** Обозначим $S_f(T), S_g(T), s_f(T), s_g(T)$ суммы Дарбу для $f(x)$ и $g(x)$. Поскольку $\sup\{kf(x)\} = k\sup\{f(x)\}$

$$\inf\{kf(x)\} = k\inf\{f(x)\},$$

$S_{kf}(T) - s_{kf}(T) < \dfrac{\varepsilon}{k}$, что выполняется при $d(T) < \delta$ ввиду интегрируемости $f(x)$.

Далее, $\sup\{f(x)+g(x)\} \le \sup\{f(x)\} + \sup\{g(x)\}$, $\inf\{f(x)+g(x)\} \ge \inf\{f(x)\} + \inf\{g(x)\}$.

Поэтому, при $S_f(T) - s_f(T) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $S_g(T) - s_g(T) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, имеем:

$$S_{f+g}(T) - s_{f+g}(T) \le S_f(T) - s_f(T) + S_g(T) - s_g(T) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, интегрируемость в свойствах 1 и 2 доказана. Равенства (6) и (7) следуют теперь из очевидных равенств: $\sigma(kf, T, \{\xi\}) = k\sigma(f, T, \{\xi\})$ и $\sigma(f+g, T, \{\xi\}) = \sigma(f, T, \{\xi\} + \sigma(g, T, \{\xi\})$ для интегральных сумм при стремлении $d(T)$ к 0.◄

Свойство 9.3. Если $f(x) \ge 0$ на $[a;b]$, $(a<b)$, и $f(x)$ – интегрируема на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

► По условию разбиения T и выбора точек ξ, $\sigma\left(f,T,\{\xi\}\right)\geq 0$. Поэтому $s(T)\geq 0,\ S(T)\geq 0$ и, т. к. $s(T)\leq I\leq S(T)$, тоже $I\geq 0$.◄

Свойство 9.4. Если $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ $(a<b)$ и для всех $x\in[a;b]$ имеет место неравенство $f(x)\leq g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\leq\int\limits_a^b g(x)dx$ (8)

►**Доказательство** По свойствам ***9.2.*** и ***9.3.*** функция $f(x)-g(x)$ интегрируема. По свойству ***9.3.***, $\int\limits_a^b (g(x)-f(x))dx\geq 0.$ (9)

Вновь по свойствам ***9.2.*** и ***9.3.***, $\int\limits_a^b (g(x)-f(x))dx=\int\limits_a^b g(x)dx-\int\limits_a^b f(x)dx\geq 0$ Поэтому из (9) следует (8).◄

Свойство 9.5. Пусть $f(x)$ – интегрируема на $[a;b]$ и $a<b$. Тогда $|f(x)|$ - интегрируема на $[a;b]$ и $|\int\limits_a^b f(x)dx|\leq\int\limits_a^b |f(x)|dx.$ (10)

► Известно, что для всех $A,\ B$ $|A-B|\geq\big||A|-|B|\big|$. Значит, $\forall x',\ x''$

$\big||f(x'')|-|f(x')|\big|\leq\big|f(x'')-f(x')\big|$. Из этого следует, что $\omega_i^{\bullet}$ - колебание функции $|f(x)|$ на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$ не превосходит колебания ω_i функции $f(x)$ на $[x_i;x_{i+1}]$. Значит, $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i^{\bullet}\Delta x_i\leq\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$ при достаточно малом $d(T)$. Это доказывает интегрируемость функции $|f(x)|$.

Наконец, $|\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\leq\sum\limits_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|\Delta x_i$ (11)

(т. к. $|A_0+\ldots+A_{n-1}|\leq|A_0|+\ldots+|A_{n-1}|$ для любых чисел $A_0,\ldots,A_{n-1}$).

Из (11) при $d(T)\to 0$ следует (10).◄

Замечание 9.1. *Из того, что $|f(x)|$ интегрируема на $[a;b]$ <u>не следует</u>, что $f(x)$ – интегрируема на $[a;b]$.*

Пример.

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x- \text{ рациональное число}\\ -1, \text{ если } x- \text{ иррациональное число}\end{cases}$$

Тогда $S(T)-s(T)=2(b-a)>0$, *а* $f(x)\equiv 1$ *– очевидно, интегрируемая функция.*

Свойство 9.6. Пусть $f(x)$ – интегрируема на $[a;b]$, $a<b$ и при $x\in[a;b]$ $m\le f(x)\le M$. Тогда $m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

.

Это сразу следует из свойства ***9.5.*** и того, что для постоянной c $\int\limits_a^b cdx = c(b-a)$

Теорема 9.3. (Теорема о среднем значении). **Пусть** $f(x)$ **– интегрируема на** $[a;b]$, $a<b$ **и при** $x\in[a;b]$ $m\le f(x)\le M$. **Тогда существует** μ, $m\le\mu\le M$ **такое, что** $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. **Если, кроме того,** $f(x)\in C([a;b])$, **то существует** $\xi\in[a;b]$: $\mu=f(\xi)$, **т. е.** $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

►**Доказательство** Первое утверждение сразу следует из ***свойства 9.6.***

Действительно $m\le\dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a)}\le M$. Обозначив $\mu=\dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a)}$, получаем требуемое утверждение.

Если же $f(x)$ – непрерывна, то она принимает все свои промежуточные значения между наименьшим m_0 и наибольшим M_0 значениями на отрезке $[a;b]$.

При этом $m_0(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx \le M_0(b-a)$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, где $m_0\le\mu\le M_0$.

Ввиду непрерывности $f(x)$ на $[a;b]$, как отмечено выше, $\mu=f(\xi)$, $\xi\in[a;b]$.◄

<u>Теорема 9.4. (Обобщенная теорема о среднем значении).</u>

Пусть:

1. $g(x)$ *и* $f(x)$ **– интегрируемы на** $[a;b]$**;**
2. $m \le f(x) \le M$ **для всех** $x \in [a;b]$**;**
3. $g(x)$ **не меняет знак на** $[a;b]$**,**

Тогда существует $\mu,\ m \le \mu \le M$ **такое, что** $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$ **. Если, при этом,** $f(x)$ **– непрерывна на** $[a;b]$**, то существует** $\xi \in [a;b]$: $\mu = f(\xi)$**.**

►**Доказательство** Пусть, для определенности, $g(x) \ge 0$ на $[a;b]$, $a < b$.

Тогда

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x) \text{ и } m\int\limits_a^b g(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx \ . \qquad (12)$$

По свойству ***9.4.*** $\int\limits_a^b g(x)dx \ge 0$. Если оказалось, что $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то из (12) следует, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и теорема справедлива при ***любом*** значении μ.◄

Билет 10. Определенный интеграл с переменным верхним пределом.

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$. Тогда, по свойству аддитивности интеграла, $f(x)$ интегрируема на $[a;x]$ при любом $x \in [a;b]$.

Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$

<u>Теорема 10.1. (Формула Ньютона-Лейбница).</u> **Если $f(x) \in C([a;b])$, то для любой первообразной $F(x)$ имеет место равенство $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.**

►**Доказательство.** По доказанному следствию, первообразная $\Phi(x)$ существует. Если $F(x)$ – любая другая первообразная, то существует $C = const$ такая, что
$\Phi(x) - F(x) = C$, т.е. $\Phi(x) = F(x) + C$. Тогда
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a) = \big(F(b) + C\big) - \big(F(a) + C\big) = F(b) - F(a)$, что и требовалось доказать.◄

<u>Теорема 10.2.</u> **Если $f(x)$ – интегрируема на $[a;x]$ при любом $x \in [a;b]$, то $\Phi(x) \in C([a;b])$.**

►**Доказательство.** Достаточно доказать, что при $\Delta x \to 0$ $\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) \to 0$ (при этом предполагается, что $x,\ x + \Delta x \in [a;b]$). По теоремам 9.2, 10.1.
$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t) - \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t = \mu\Delta x$, согласно теореме о среднем (при этом $m \le \mu \le M$, где $m = \inf\limits_{[a;b]}\{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{[a;b]}\{f(x)\}$). При $\Delta x \to 0$ очевидно, $\mu\Delta x \to 0$. Теорема доказана.◄

<u>Теорема 10.3.</u> **Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и непрерывна в точке $x \in [a;b]$. Тогда $\Phi(x)$ имеет производную в точке x, причём $\Phi'(x) = f(x)$.**

►**Доказательство.**

$$\left|\frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} - f(x)\right| = \frac{\left|\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - f(x)\Delta x\right|}{\Delta x} = \frac{\left|\int\limits_x^{x+\Delta x} \big(f(t) - f(x)\big)\mathrm{d}x\right|}{\Delta x} \le \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t) - f(x)|\mathrm{d}x}{\Delta x}.$$

По условию, $f(x)$ непрерывна в точке x, следовательно, $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, как только $|t - x| < \delta$. Но $|t - x| < \Delta x$. Значит, при $\Delta x < \delta$ $\left|\frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} - f(x)\right| < \frac{\varepsilon\Delta x}{\Delta x} = \varepsilon$, что как раз и означает, что $\Phi'(x) = f(x)$.◄

Определение 10.1. Если для всех $x \in (a;b)$ справедливо равенство $\Phi'(x) = f(x)$ то $\Phi(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на $(a;b)$.

Можно рассматривать первообразную и на отрезке $[a;b]$, тогда в точке a должно выполнятся равенство $\Phi'_{прав}(a) = f(a)$, а в точке b – равенство $\Phi'_{лев}(b) = f(b)$.

Следствие. Если $f(x) \in C([a;b])$ $\Phi'(x) = f(x)$ и $\Phi(x)$ – *первообразная* для $f(x)$.

Замечание. *Пример* $f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$, $\Phi(x) = \int\limits_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ *показывает, что* $\Phi'(0) = f(0)$ *(т. к.* $\Phi(x) \equiv 0$*), т.е.* $\Phi'(x) \neq f(x) = 1$*, поэтому в случае точки разрыва теорема может оказаться неверной.*

Билет 11. Приёмы вычисления определённых интегралов.

Уже сформулирована и доказана теорема Ньютона-Лейбница (см. бил. 10)

<u>Теорема. 11.1. (Замена переменной.)</u> **Пусть** $f(x) \in C([a;b])$ **и** $x = \phi(t)$**, где:**

1. $\phi(t)$ **определена и непрерывна на** $[\alpha, \beta]$**;**
2. **значения** $\phi(t)$ **при** $t \in [\alpha, \beta]$ **не выходят за пределы отрезка** $[\alpha, \beta]$**;**
3. $\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b$**;**
4. $\phi'(t) \in C([\alpha, \beta])$**.**

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$

►**Доказательство.** Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Тогда $\left[F(\phi(t))\right]' = F'(x)\cdot\phi'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t)$. Поэтому выполняются равенства: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, $\int\limits_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = F(b) - F(a)$ и требуемое равенство установлено.◄

<u>Теорема. 11.2. (Интегрирование по частям)</u> **Пусть** $u(x),\ v(x),\ u'(x),\ v'(x)$ **непрерывны на** $[a,b]$**. Тогда** $\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx$**.**

►**Доказательство.** $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Поскольку $u'(x)v(x)$ — непрерывная функция, то существует её первообразная $\Psi(x)$, т.е. $u'(x)v(x) = \Psi'(x)$.

Тогда $u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - \Psi'(x)$ и

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int\limits_a^b \left((u(x)v(x))' - \Psi'(x)\right)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b -$$

$$-\Psi(x)\Big|_a^b = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b \Psi'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

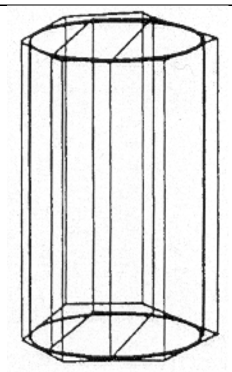
Теорема доказана. ◄

Билет 12. Приложения интеграла: объём тела.

Определение объема можно дать аналогично определению площади образом: считая известным понятие объема многогранника, рассмотреть множество объемов содержащихся в данном теле многогранников и множество объемов содержащих данное тело многогранников. Если точная верхняя грань первого из рассматриваемых множеств равно точной нижней грани второго, то тело называется ***кубируемым***, или имеющим объем, равный общему значению этих точных граней.

Теорема 12.1. **Если T представляет собой прямой цилиндр высоты H в основании которого лежит квадрируемая фигура P с площадью $S(P)$ то T - кубируема, причем** $V(T)=S(P)H.$

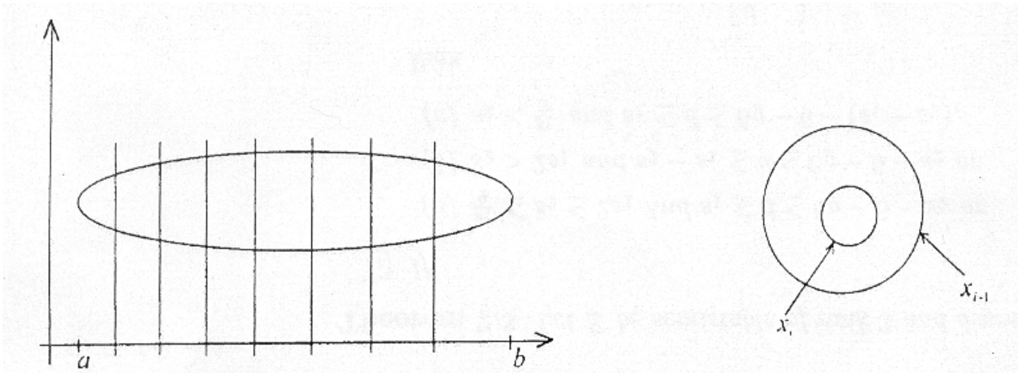
►**Доказательство.** Пусть $\varepsilon>0$. Рассмотрим многоугольники $A\subset P\subset B$ такие, что $S(B)-S(A)<\dfrac{\varepsilon}{H}.$



Построим содержащийся в T и содержащий T многогранники высотой H, в основании которых лежат, соответственно, A и B. Тогда объемы этих многогранников отличаются на $H\left(S(B)-S(A)\right)<H\cdot\dfrac{\varepsilon}{H}=\varepsilon.$ Ввиду произвольности $\varepsilon>0$, теорема доказана.◄

Теорема 12.2. **Пусть T - пространственное тело, а оси расположены так, что любое сечение, перпендикулярное оси x этого тела, представляет собой квадрируемую фигуру с площадью $S(x)$, $a\le x\le b$, причем для любых $x_1,\ x_2\in[a;b]$ проекция одного из сечений на плоскость OYZ целиком содержится в проекции другого сечения. Тогда T - кубируемое тело, и** $V(T)=\int\limits_a^b S(x)\,dx.$

►**Доказательство.** Для произвольного разбиения отрезка $[a;b]$ суммы Дарбу представляют собой объемы тел, содержащихся внутри T (нижняя сумма Дарбу) и содержащих T (верхняя сумма Дарбу). Поскольку $S(x)$ интегрируема, при измельчении разбиения разность между верхней и нижней суммой Дарбу стремится к нулю. Это означает, что T имеет объем, причем $V(T)=\int\limits_a^b S(x)\,dx.$ ◄

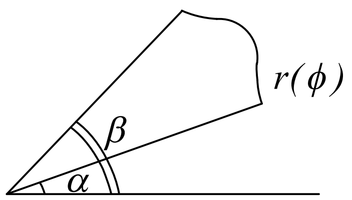


Следствие. Объем тела, полученного вращением вокруг оси OX графика функции $y = f(x)$ равен $V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$

►**Доказательство.** Площадь круга радиуса $f(x)$ равна $\pi \cdot f^2(x)$.◄

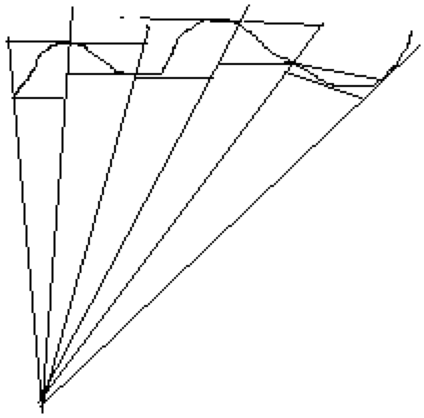
12.1. Приложение интеграла: площадь в полярных координатах.

<u>Теорема 12.3. (Площадь в полярных координатах).</u>



Пусть фигура представляет собой часть угла: $\alpha \le \phi \le \beta$, ограниченную графиком $r = r(\phi)$, $r(\phi)$ - непрерывная на $[\alpha;\beta]$ функция. Тогда $пл.(P) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\phi)\,d\phi.$

►**Доказательство.** Рассмотрим разбиение отрезка $[\alpha;\beta]$ и соответствующие ему нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для интеграла из формулировки теоремы. По известной из школьного курса формуле для площади кругового сектора, эти суммы представляют собой площади фигур $A_1 \subset P \subset B_1$.

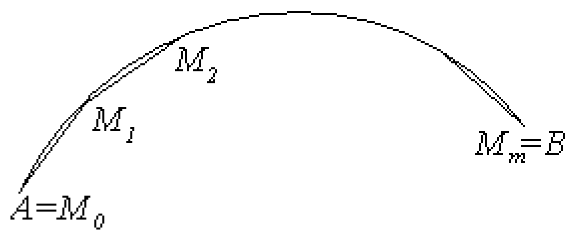


При измельчении разбиения эти суммы $\left(\sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 \frac{\Delta\phi_1}{2}\right.$ и $\sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 \frac{\Delta\phi_i}{2}$, где $m_i = \min\limits_{\phi\in[\phi_{i-1};\phi_i]} r(\phi)$, $\left.M_i = \max\limits_{\phi\in[\phi_{i-1};\phi_i]} r(\phi)\right)$ стремятся к общему значению: $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\phi)\, d\phi$, которое и равно искомой величине площади, поскольку A_1 и B_1 - квадрируемые фигуры.◄

Билет 13. Приложения интеграла: длина дуги кривой, площадь поверхности вращения

13.1. Длина дуги кривой

Пусть незамкнутая, не имеющая точек самопересечения кривая задана параметрическим уравнением $x = x(t)$, $y = y(t)$, $T_0 \le t \le T_1$, причем $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны на $[T_0;T_1]$.



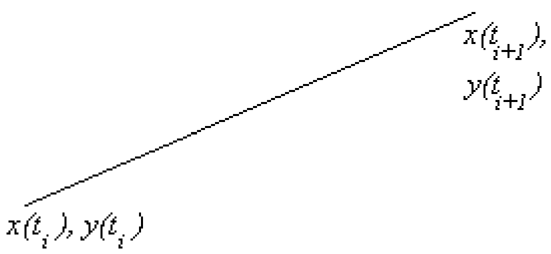
Пусть M_i имеет координаты $x(t_1)$, $y(t_1)$. $t_0 = T_0 < t_1 < t_2 < ... < t_m = T_1$. Рассмотрим ломаные линии, соединяющие выбранные вышеуказанным способом точки.

Определение 13.1. Если существует предел длины ломаной при стремлении к 0 максимальной длины звена ломаной, то этот предел называется длиной дуги кривой (а кривая называется ***спрямляемой*** или имеющей длину).

Теорема13.1. **При сформулированных выше условиях (т. е. если кривая незамкнутая и без точек самопересечения, причем ее параметризация $x = x(t)$, $y = y(t)$ задается непрерывно дифференцируемыми функциями от t) кривая имеет длину $l = \int\limits_{T_0}^{T_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.**

►**Доказательство.** Рассмотрим вписанную ломаную и соответствующие ей точки деления отрезка $[T_0;T_1]$. Длина ломаной равна $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}$ (под знаком суммы стоит длина i-ого звена).

Применим к каждой из разностей $x(t_{i+1}) - x(t_i)$ и $y(t_{i+1}) - y(t_i)$ теорему Лагранжа,



согласно которой $x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\xi_i)\Delta t_i$, $y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\eta_i)\Delta t_i$, где точки ξ_i и η_i лежат на интервале (t_i, t_{i+1}). Поэтому длина вышеупомянутой ломаной есть

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2}\,\Delta t_i = \rho. \qquad (1)$$

Эта величина напоминает соответствующую интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2}\,\Delta t_i=\sigma \tag{2}$$

(различие только в том, что в (1) стоят точки ξ_i, η_i, в (2) – только ξ_i).

Требуется доказать, что при стремлении к 0 максимальной длины звена ломаной линии разность величин ρ и σ стремится к 0.

Можно доказать (но мы это оставим без строгого доказательства), что стремление к 0 максимальной длины звена ломаной эквивалентно стремлению к 0 диаметров соответствующих разбиений отрезка $[T_0,T_1]$.

Итак, будем доказывать, что при $d(T)\to 0$ $|\rho-\sigma|\to 0$. Для этого заметим, что $|\rho-\sigma|=\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2}-\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2}\right)\Delta t_i\right|\le$

$$\le\sum_{i=0}^{n-1}\left|\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\eta_i))^2}-\sqrt{(x'(\xi_i))^2+(y'(\xi_i))^2}\right|\Delta t_i\le\sum_{i=0}^{n-1}|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|. \tag{3}$$

Последний переход сделан на основании элементарного неравенства $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}\right|=\dfrac{|b^2-b_1^2|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}=\dfrac{|b+b_1|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}|b-b_1|\le$

$$\le\frac{|b|+|b_1|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}|b-b_1|\le|b-b_1|, \text{ т. к. } \sqrt{a^2+b^2}\ge|b|,\ \sqrt{a^2+b_1^2}\ge|b_1|.$$

По условию, функция y' непрерывна на $[T_0,T_1]$, следовательно, по теореме Кантора, y' равномерно непрерывна на $[T_0,T_1]$, поэтому $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall$ разбиения $[T_0,T_1]$ с условием $\max|\Delta t_i|<\delta$ $|y'(\xi_i)-y'(\eta_i)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $|\rho-\sigma|<\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon}{b-a}\Delta t_i=\varepsilon$.

Поскольку интегральные суммы стремятся к $\int_{T_0}^{T_1}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$ при $\max|\Delta t_i|\to 0$, существует предел длины ломаных, причем этот предел равен указанному интегралу. Теорема доказана.◄

Следствие 1. Если кривая задана ***явным*** уравнением $y=f(x), x\in[a,b]$, то формула принимает вид $l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

►**Доказательство.** Сводим к предыдущему случаю: $x=x, y=f(x)$.◄

Следствие 2. Если кривая задана ***полярным*** уравнением $r = r(\phi), \phi \in [\alpha, \beta]$, то $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\phi) + (r'(\phi))^2}\, d\phi$.

►**Доказательство.** Положим $x = r(\phi)\cos\phi, y = r(\phi)\sin\phi$. Тогда $x' = r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi$, $y' = r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi$, $(x')^2 + (y')^2 = (r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi)^2 +$

$+ (r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi)^2 = (r'(\phi))^2\cos^2\phi - 2r'(\phi)r(\phi)\cos\phi\sin\phi + r^2(\phi)\sin^2\phi +$

$+ (r'(\phi))^2\sin^2\phi + 2r'(\phi)r(\phi)\cos\phi\sin\phi + r^2(\phi)\cos^2\phi = (r'(\phi))^2 + (r(\phi))^2$, и можно применить формулу из доказанной теоремы.◄

Примечание. *В случае трехмерной кривой* $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $t \in [T_0, T_1]$, *где* x, y, z *– непрерывно дифференцируемые функции,* $l = \int\limits_{T_0}^{T_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$.

13.2. Площадь поверхности вращения

Пусть $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \tau_0 < t < \tau_1$ - незамкнутая кривая, x, y, x', y' - непрерывные функции.

Вращаем кривую вокруг оси Ox. При этом получается поверхность вращения. Не входя в детали определения площади поверхности в общем случае - это будет сделано в курсе 4-ого семестра, и считая, что площадь поверхности вращения существует и обладает свойством аддитивности, укажем формулу для ее вычисления: $S = 2\pi \int\limits_{\tau_2}^{\tau_1} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)dt}$.

Действительно, считая поверхность вращения малого участка кривой вокруг оси Ox близкой к части поверхности усеченного конуса с основаниями $y(t_i)$, $y(t_{i+1})$ и длиной образующей $\sqrt{\left(x'(\xi_i)\right)^2 + \left(y'(\xi_i)\right)^2}$ (как и в теореме о длине дуги), получим, что

$\Delta S_i \cong 2\pi \dfrac{y(t_i) + y(t_{i+1})}{2} \sqrt{\left(x'(\xi_i)\right)^2 + \left(y'(\xi_{i+1})\right)^2}\Delta t_i$. Суммируя и переходя к пределу при $\Delta t_i \to 0$, получаем требуемое.

Билет 14. Несобственные интегралы и обобщение понятия площади плоской фигуры. Сходимость интегралов $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}, \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^q}$.

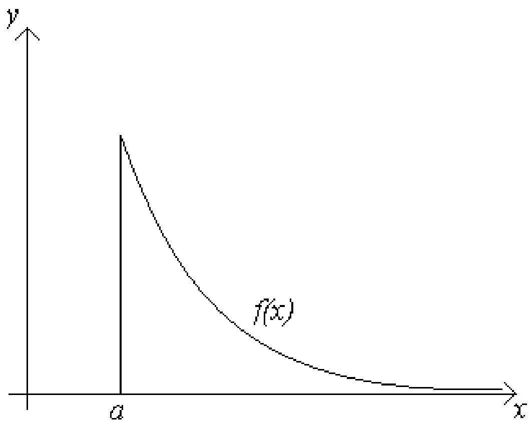
Предположим, что для всех $b \in [a,+\infty)$ существует $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Если существует $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = I$, то этот предел называется ***несобственным интегралом*** $f(x)$ от a до $+\infty$ и обозначается

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (1).$$

Говорят еще, что интеграл (1) ***сходится.***

Аналогично, пусть для всех $b \in [a;\omega)$, $\omega \in R$ существует $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Если существует $\lim\limits_{b\to\omega-0} F(b) = I$, то этот предел называется ***несобственным интегралом*** $f(x)$ от a до ω и обозначается

$$\int\limits_a^{\omega} f(x)dx \qquad (2).$$



Отметим, что если $f(x)$ просто интегрируема на отрезке $[a;\omega]$, то ввиду непрерывности интеграла с переменным верхним пределом понятие несобственного интеграла совпадает с обычным интегралом. Но бывает и так, что в обычном смысле интеграл не существует, а в несобственном – существует.

Понятие несобственного интеграла позволяет обобщить понятие площади на случай ***неограниченных фигур.***

Именно, можно считать величину интеграла $\int\limits_a^{\omega} f(x)dx$ площадью фигуры под графиком $y = f(x)$, если рассматриваемый интеграл сходится.

Аналогично, площадь такой фигуры можно выразить интегралом $\int\limits_a^{\omega} f(x)dx$, если он сходится.

Сходимость интегралов $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}, \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^q}$ *(стр. 2 из 2)*

Выясним, когда сходится $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, $a>0$ (3).

Известно, что $\int \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}x^{1-p}+C, p\neq 1 \\ \\ \ln x + C, p=1 \end{cases}$.

Поэтому при $p>1$: $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}b^{1-p} - \frac{1}{1-p}a^{1-p}\right) = -\frac{1}{1-p}a^{1-p}$, т.к. $b^{1-p}\to 0$ при $b\to+\infty$. При $p=1$ $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{a} = +\infty$ и при $p<1$ $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}b^{1-p} - \frac{1}{1-p}a^{1-p}\right) = +\infty$, т. к. $b^{1-p}\to+\infty$. То есть интеграл (3) сходится при $p>1$ и расходится при остальных значениях p.

Аналогичные рассуждения проведем для $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^q}$ (4).

При $q\le 0$ это – обычный интеграл. При $q>0$ этот интеграл не может существовать в собственном смысле, так как $\frac{1}{x^q}$ не ограничена в окрестности $x=0$. Далее при $q\neq 1$ $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^q} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{1-q} - \frac{\varepsilon^{1-q}}{1-q}\right) = \begin{cases} +\infty, q>1 \\ \\ \frac{1}{1-q}, q<1 \end{cases}$, а при $q=1$ имеем $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}(-\ln\varepsilon) = +\infty$.

Значит, интеграл (4) расходится при $q\ge 1$.

Билет 15. Теоремы о сравнении для несобственных интегралов от неотрицательных функций

Часто бывает важно установить не само значение интеграла, а только сходится он или нет. Для этого используются ***признаки сходимости.*** Особенно простой вид они имеют для неотрицательных функций. Это связано с тем, что для неотрицательной $f(x)$ интеграл $F(b)=\int\limits_a^b f(x)dx$ есть ***неубывающая*** функция от b. Поэтому, используя теорему Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной функции получаем, что сходимость такого интеграла равносильна ограниченности всех $F(b)$, $b<\omega$ в совокупности. Это соображение позволяет доказать важные теоремы сравнения.

Теорема 15.1. **Пусть $f_1(x), f_2(x)$ определены и интегрируемы в обычном смысле на любом $[a;b)$, где $b<\omega$ (а ω - либо бесконечно удаленная точка, либо $\omega\in R$). Пусть при $a\le a_0<\omega$ выполняется неравенство $0\le f_1(x)\le f_2(x)$. Тогда если сходится $\int\limits_a^\omega f_2(x)dx$, то сходится и $\int\limits_a^\omega f_1(x)dx$.**

►**Доказательство.** Во-первых, заметим, что сходимость интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ равносильна сходимости интеграла $\int\limits_{a_0}^\omega f(x)dx$, поскольку эти величины отличаются лишь постоянным слагаемым $\int\limits_a^{a_0} f(x)dx$.

Далее, $\forall b$ $\int\limits_{a_0}^b f_1(x)dx \le \int\limits_{a_0}^b f_2(x)dx$, или $F_1(b)\le F_2(b)$. По доказанному выше, сходимость $\int\limits_{a_0}^\omega f_2(x)dx$ равносильна ограниченности величины $F_2(b)=\int\limits_{a_0}^b f_2(x)dx$. Значит, $\exists C:\forall b$ $F_2(b)\le C$. Но тогда и $F_1(b)\le F_2(b)\le C$, то есть $F_1(b)$ ограничена и, значит, $\int\limits_{a_0}^\omega f_1(x)dx$ сходится.◄

Примечание. *Эта теорема равносильна такой: при выполнении остальных условий теоремы, если* $\int\limits_a^\omega f_1(x)dx$ *расходится, то расходится и* $\int\limits_a^\omega f_2(x)dx$.

Действительно, если бы $\int\limits_a^\omega f_2(x)dx$ *сходился, то по теореме 1, сходился бы и* $\int\limits_a^\omega f_1(x)dx$.

Теорема 15.2. **Пусть при** $a \le x < \omega$ $f_1(x) \ge 0$**,** $f_2(x) > 0$ **и пусть** $\exists \lim\limits_{x\to\omega-0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = k \ne 0$**, где** $f_1(x), f_2(x)$**, как обычно, определены и интегрируемы в обычном смысле на любом** $[a;b]$**, где** $b < \omega$**. Тогда либо оба интеграла** $\int\limits_a^\omega f_1(x)dx$**,** $\int\limits_a^\omega f_2(x)dx$ **сходятся, либо оба расходятся.**

►**Доказательство.** Очевидно, что $k > 0$ (т.к. то что $k \ge 0$ следует из свойств предела, и $k \ne 0$ по условию). Тогда для $\varepsilon = \dfrac{k}{2}$, используя определение предела, получаем, что существует окрестность точки ω такая, что в ней $\left|\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} - k\right| < \dfrac{k}{2}$ или $\dfrac{k}{2} < \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} < \dfrac{3k}{2}$ или, так как $f_2(x) > 0$, $\dfrac{k}{2} f_2(x) < f_1(x) < \dfrac{3k}{2} f_2(x)$. Далее, если сходится $\int\limits_a^\omega f_1(x)dx$, то, по теореме 15.1, сходится $\int\limits_a^\omega \dfrac{k}{2} f_2(x)dx$ и, значит, $\int\limits_a^\omega f_2(x)dx$. Если сходится $\int\limits_a^\omega f_2(x)dx$, то сходится $\int\limits_a^\omega \dfrac{3k}{2} f_2(x)dx$ и, значит, $\int\limits_a^\omega f_1(x)dx$. Теорема доказана.◄

Пример. Доказать, что интеграл $\int\limits_1^\infty \ln(1+\sin\dfrac{1}{x^2})dx$ сходится.

►**Доказательство.** $0 < \dfrac{1}{x^2} \le 1$, значит, $\sin\dfrac{1}{x^2} > 0$ и $\ln\left(1+\sin\dfrac{1}{x^2}\right) > 0$. Кроме того, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\sin\left(1/x^2\right)\right)}{1/x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\left(1/x^2\right)}{1/x^2} = 1$. (Использовали, что $\ln(1+t) \approx t$, $\sin t \approx t$ при $t \to 0$). Поэтому применима теорема 15.2. и сходимость доказана.◄

Билет 16. Абсолютно сходящиеся интегралы, условно сходящиеся интегралы.

Перейдем к несобственным интегралам.

Определение 16.1. $\int\limits_a^{\omega} f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится $\int\limits_a^{\omega} |f(x)|dx$ (и, разумеется, если $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ существует для любого $b<\omega$).

Легко видеть, что абсолютно сходящийся интеграл сходится, что следует из критерия Коши существования предела функции, примененного к $F(b)=\int\limits_a^{b} f(x)dx$ и $\widetilde{F}(b)=\int\limits_a^{b} |f(x)|dx$. Дано, что $\forall \varepsilon>0 \ \ \exists B(\varepsilon)>0 \ \ \forall b_1, b_2 > B(\varepsilon)$, $b_1, b_2<\omega$ $\int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx<\varepsilon$. Но тогда $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx<\varepsilon$ по свойству 9.5 и, значит, выполнен критерий Коши для $F(b)=\int\limits_a^{b} f(x)dx$.

Вместе с тем, существуют сходящиеся интегралы $\int\limits_a^{\omega} f(x)dx$ такие, что $\int\limits_a^{\omega} |f(x)|dx$ расходится. Такие интегралы называются ***условно сходящимися.*** Примером служит $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x}dx+\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$. Первое слагаемое – это собственный интеграл. Второй интеграл, по определению, равен $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} \frac{\sin x}{x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{-\cos b}{b}+\frac{\cos 1}{1}-\int\limits_1^{b} \frac{\cos x}{x^2}dx\right)$. Так как $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{-\cos b}{b}\right)=0$, а $\frac{|\cos x|}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$ и $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ - сходится, то рассматриваемый интеграл сходится.

С другой стороны, если бы сходился $\int\limits_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$, то из неравенства $|\sin x|\ge\sin^2 x$ следовало бы, что $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ - сходится. Но это не так, поскольку $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ и $\int\limits_1^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}dx=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}-\int\limits_1^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$. Причем первый из интегралов расходится, а второй – сходится, что можно доказать аналогично доказательству сходимости $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Билет 17. Формулы приближенного интегрирования

Пусть $f(x)$- непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Если удалось найти её первообразную $F(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Однако во многих задачах отыскать первообразную в виде элементарной функции не удаётся. Тем не менее, интеграл $\int_a^b f(x)dx$ во многих случаях легко вычислить с требуемой точностью, используя формулы приближённого интегрирования.

Простейшая формула может быть получена так. Разобьём всю фигуру – под графиком f на отрезке $[a,b]$ - на вертикальные полоски равной ширины, а затем заменим каждую из этих полосок прямоугольником, за высоту которого примем величину $f(\xi_i)$, где $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, $i = 0,1,...,n-1$ и $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. При этом искомая площадь заменяется площадью некоторой состоящей из прямоугольников ступенчатой фигуры. Иными словами, неполный интеграл заменяется его интегральной суммой. Эта приближенная формула носит название ***формулы прямоугольников.*** В ней обычно берут $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ и обозначают эту величину $x_{i+\frac{1}{2}}$, а $f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = y_{i+\frac{1}{2}}$. Итак, формула прямоугольников (см. рис. 1)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_{1/2} + y_{3/2} + ... + y_{n-\frac{1}{2}}\right) \qquad (1)$$

Геометрические соображения – замена прямоугольника трапецией (см. рис. 2) – приводят к другой часто используемой формуле, ***формуле трапеций***. В ней график $f(x)$ заменяется ломаной с вершинами в точках (x_i, y_i), где $y_i = f(x_i)$, $i = 0,...,n$; площади получающихся трапеций равны $\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right)$, $\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right),\ldots,\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right)$. Сложив эти площади, получим формулу трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + ... + y_{n-1}\right) \qquad (2)$$

Какова точность этой формулы. Без доказательства сообщим, что если $f(x)$ обладает второй производной $f''(x)$ на $[a,b]$, и если $M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$, то абсолютная погрешность R_n формулы (2) удовлетворяет неравенству

$$R_n \le M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

Если вместо приближения графика функции ломаными линиями использовать приближения параболами, то, для четного числа n получим формулу

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})\right], \qquad (3)$$

называемую ***формулой Симпсона*** (параболической формулой).

Точность этой формулы, при условии существования $f^{IV}(x)$, $x \in [a,b]$, оценивается так:

$$R_n < \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4, \text{ где } M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left| f^{IV}(x) \right|$$

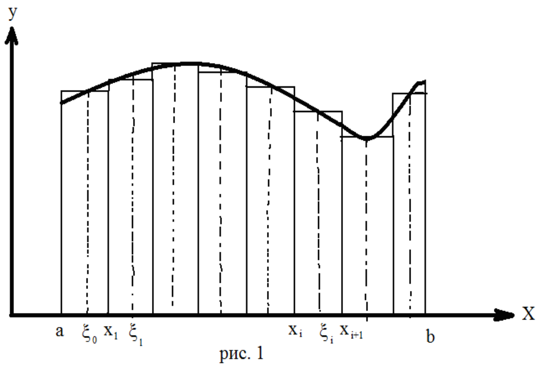


рис. 1

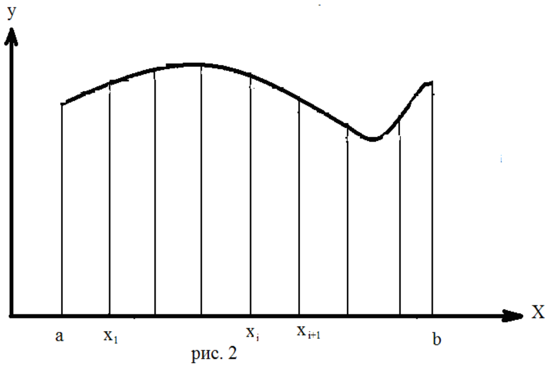


рис. 2

Попробуем теперь решить те же самые задачи, привлекая вероятностные соображения. Для этого снова вернёмся к однократному интегралу $\int_0^1 f(x)dx$ и вспомним, что геометрически он представляет собой площадь области A, ограниченной графиком функции $f(x)$ (рис.3).

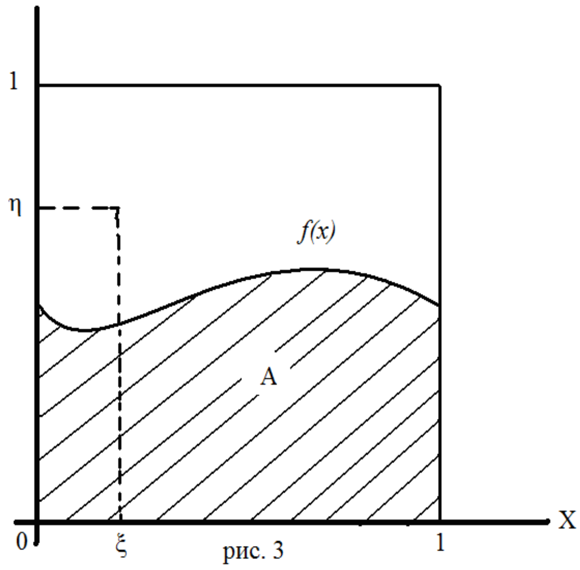


рис. 3

Проведём опыт, заключающийся в бросании случайным образом (т.е. в соответствии с принципом геометрической вероятности) двух точек на отрезок $[0,1]$. Обозначим координату одной из них через ξ, а другой – через η и отложим ξ и η по осям абсцисс и ординат соответственно (см. рис.3). Проверим выполнение неравенства $\eta < f(\xi)$. Справедливость этого неравенства означает, что точка (ξ, η) попала в область A. Но в соответствии с принципом геометрической вероятности вероятность $P(A)$ попадания точки (ξ, η) в область A есть отношение площади A к площади единичного квадрата, т.е. $P(A) = \int_0^1 f(x)dx$.

Повторим описанный выше опыт n раз и по результатам наблюдений определим частоту $f = \frac{n_A}{n}$ появления события A, т.е. попадания точки (ξ, η) в область A. Поскольку по теореме Бернулли частота f с ростом n стремится к вероятности $P(A)$, то, подставляя вместо вероятности $P(A)$ ее значение, получаем приближенное равенство

$$\int_0^1 f(x)dx \approx f = \frac{n_A}{n},$$

которое и служит для оценки интеграла по результатам случайных испытаний.

Описанный метод приближенного вычисления определенного интеграла носит название метода статистических испытаний или метода Монте-Карло (город Монте-Карло – место сосредоточения всемирно известных игорных домов). Название «метод Монте-Карло» связано с тем, что проводимые испытания очень напоминают подбрасывание монеты, бросание игральной кости или игру в рулетку.

Имеется существенное качественное различие между погрешностями, возникающими при применении методов численного интегрирования и метода Монте-Карло. В первом случае при выполнении соответствующих условий можно дать гарантированную оценку точности, т.е. указать достоверные границы, в которых обязательно будет заключено истинное значение вычисляемого интеграла. Во втором случае гарантированную оценку нельзя дать в принципе, а можно сказать только, что отклонение значения интеграла, вычисленного методом Монте-Карло, от истинного значения этого же интеграла не превосходит некоторой величины с определенной вероятностью.

Билет 18. Пространство $\mathbb{R}^n$, множества в нём.

Напомним, что ***арифметическое n-мерное пространство*** $\mathbb{R}^n$ представляет собой множество точек $\overline{x} = (x_1,...,x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1,...,n.$
Это векторное пространство с операциями суммы $\overline{x}+\overline{y}$ и произведения на число λ, определяемыми так

$$\overline{x}+\overline{y} = (x_1+y_1,...,x_n+y_n), \overline{y} = (y_1,...,y_n).$$
$$\lambda\overline{x} = (\lambda x_1,...,\lambda x_n)$$

Более того – это евклидово пространство со скалярным произведением $(\overline{x}\cdot\overline{y}) = x_1y_1+...+x_ny_n$. Следовательно, определена ***норма вектора*** $\overline{x}$, равная $\left|\overline{x}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ и расстояние между $\overline{x}$ и $\overline{y}$,заданное формулой:

$$\rho(\overline{x},\overline{y}) = \left|\overline{x}-\overline{y}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \qquad (1)$$

При $n=2$ и $n=3$ эта формула становится очевидной формулой для расстояний на плоскости и в пространстве, поэтому общую формулу (1) для расстояния можно рассматривать как ***естественное*** обобщение известных формул на случай n-мерного пространства.

В курсе линейной алгебры было доказано:

1. $\forall\overline{x},\overline{y}\ \ \rho(\overline{x},\overline{y}) \ge 0$, причем $\rho(\overline{x},\overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$;
2. $\forall\overline{x},\overline{y}\ \ \rho(\overline{x},\overline{y}) = \rho(\overline{y},\overline{x})$;
3. $\forall\overline{x},\overline{y},\overline{z}\ \ \rho(\overline{x},\overline{z}) \le \rho(\overline{x},\overline{y}) + \rho(\overline{y},\overline{z})$.

Свойство 3 называется ***неравенством треугольника.***

<u>Определение 18.1.</u> Множество, на котором определена функция ρ, обладающая свойствами 1-3, называется ***метрическим пространством***, а ρ ***- метрикой*** (или ***расстоянием***) а этом пространстве.

Итак, R^n - метрическое пространство с расстоянием ρ.

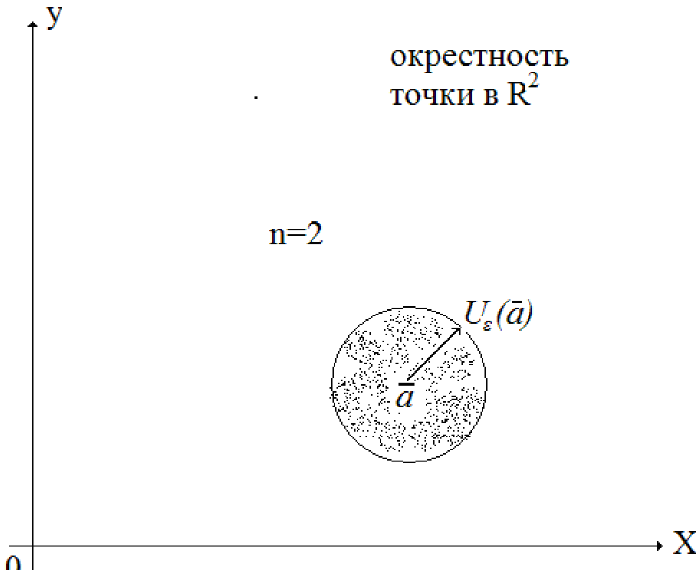


Рис. 1

Определение 18.2. ε **- *окрестностью*** точки $\bar{a} \in R^n$ называется множество точек $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\rho(\bar{x}, \bar{a}) < \varepsilon$. Обозначим ее $U_\varepsilon(\bar{a})$ (рис. 1)

Определение 18.3. Пусть $\bar{a} \in A \subset R^n$. Тогда $\bar{a}$ называется ***внутренней точкой*** этого множества, если $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\bar{a}) \subset A$ (рис. 2)

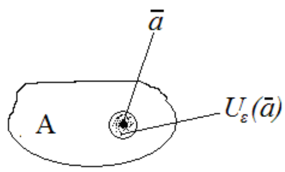


рис. 2

Определение 18.4. $E \subset R^n$ - ***открытое*** множество, если все его точки – внутренние.

Примеры: интервал, круг без границы.

Определение 18.5 Пусть $A \subset R^n$. Точка $\bar{a} \in R^n$ называется ***предельной точкой множества*** A, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; U_\varepsilon(\bar{a}) \cap A \neq \varnothing$.

Определение 18.6. $F \subset R^n$ называется *замкнутым* множеством, если оно содержит все свои предельные точки.

Примеры: отрезок, круг с границей.

Замечание. *Часто вместо «круглых» окрестностей рассматривают «прямоугольные», т.е.* $\{\bar{x} : |x_i - a_i| < \varepsilon, i = 1,\ldots,n\}$.

Легко видеть, что каждую «круглую» окрестность можно вписать в «прямоугольную» и наоборот (рис. 3, 4).

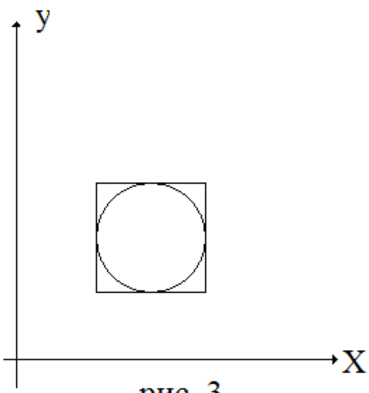


рис. 3

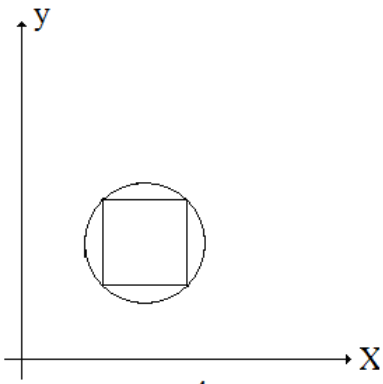


рис. 4

Определение 18.7. Множество K называется ***компактным*** если из любой бесконечной системы открытых множеств G_α такой, что $K \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ можно выбрать конечное число $\alpha_1,...,\alpha_m$ так, что $K \subset G_{\alpha_1} \bigcup ... \bigcup G_{\alpha_m}$.

Иными словами, из ***любого покрытия*** K можно выделить ***конечное подпокрытие.***

Теорема 18.1. **(без доказательства)** $K \subset R^n$ **компактно тогда и только тогда, когда оно ограниченное (т.е. содержится в некотором шаре с центром в начале координат) и замкнутое.**

Билет 19. Функции и отображения. Предел, непрерывность.

Определение 19.1. Функция $f(\overline{x}) = f(x_1,...,x_n), f(\overline{x}): \mathrm{X} \to R$ сопоставляет элементам множества $\mathrm{X} \subset R^n$ (называемого областью определения) числа $y \in R$.

Определение 19.2 Отображение $\overline{f}(\overline{x}): X \to R^m$ сопоставляет элементам множества $\mathrm{X} \subset R^n$ элементы $\overline{y} \in R^m$.

Таким образом, функция – это частный случай отображения $(m=1)$. Задать отображение – это все равно, что задать m функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,...,x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1,...,x_n) \end{cases}.$$

Примеры.

1. $z = x + y$ - функция двух переменных, паре (x, y) сопоставляет число $z, z = x + y$.
2. Отображение $R^3 \to R^2$ $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{cases}$.
3. Вектор-функция $R^1 \to R^3$ $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t, t \to (x, y, z) \\ z = bt \end{cases}$. Винтовая линия.

Пусть $\overline{a} \in R^n, \overline{b} \in R^m, \overline{f}: R^n \to R^m, \overline{a}$ - предельная точка области определения $\overline{f}$.

$\overline{b} = \lim\limits_{x \to a} \overline{f}(\overline{x}) \Leftrightarrow \forall V(\overline{b})\ \ \exists \dot{U}(\overline{a})\ \ \forall \overline{x} \in \dot{U}(\overline{a})\ \ \overline{f}(\overline{x}) \in V(\overline{b}).$

“Конкретизируя” окрестности, это определение в метрических пространствах $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall \overline{x} \in \dot{U}_\delta(\overline{a})\ \ \overline{f}(\overline{x}) \in V_\varepsilon(\overline{b})$, или, для $\overline{f}: R^n \to R^m$

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall \overline{x}: 0 < \underset{R^n}{\rho}(\overline{x}, \overline{a}) < \delta\ \ \ \underset{R^m}{\rho}(\overline{f}(\overline{x}), \overline{b}) < \varepsilon.$ Или $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$

$\forall \overline{\mathrm{x}}: 0 < \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2} < \delta$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_1(\overline{x}) - b_i)^2} < \varepsilon \qquad (1)$$

<u>Теорема 19.1</u>. $\overline{f}(\overline{x}): R^n \to R^m, \lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{b} \Leftrightarrow \forall i,\ i = 1,...,m\ \ \lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f_i(\overline{x}) = b_i$.

►**Доказательство.**

$\Rightarrow$ Поскольку $\sqrt{\sum\limits_{l=1}^{m}(f_i(\overline{x})-b_i)^2} \geq \max\limits_{i=1,...,m}\left|f_i(\overline{x})-b_i\right|$, из (1) следует, что $\left|f_i(\overline{x})-b_i\right| < \varepsilon$ при $i = 1,...,m$. Но это как раз и означает, что $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f_i(\overline{x}) = b_i$.

$\Leftarrow$ Пусть $\varepsilon > 0$ - фиксировано. Выберем $\delta_1,...,\delta_m$ так, чтобы при $0 < \rho(\overline{x},\overline{a}) < \delta_i$ выполнялось неравенство $\left|f_i(\overline{x})-b_i\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Взяв $\delta = \min(\delta_1,...,\delta_m)$ получаем, что при $0 < \rho(\overline{x},\overline{a}) < \delta$ выполняется следующее неравенство:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(f_i(\overline{x})-b_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon\ .◄$$

<u>Определение 19.3.</u> Отображение $\overline{f}(\overline{x})$ ***непрерывно*** в точке $\overline{a}$, если $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{a})$.

Согласно сказанному выше, непрерывность отображения $\overline{f}(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}),...,f_m(\overline{x}))$ равносильна непрерывности всех функций $f_1(\overline{x}),...,f_m(\overline{x})$.

Так же, как и в случае функций одной переменной, справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 19.2.</u> Если $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f_1(\overline{x}) = A_1, \lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f_2(\overline{x}) = A_2$**, то** $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}}(f_1(\overline{x}) + f_2(\overline{x})) = A_1 + A_2$**,** $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}}(f_1(\overline{x}) - f_2(\overline{x}) = A_1 - A_2$**, и если** $A_2 \neq 0$**, то** $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} \dfrac{f_1(\overline{x})}{f_2(\overline{x})} = \dfrac{A_1}{A_2}$**.**

Следствие. Сумма, разность, произведение и частное (при $f_2(\overline{x}) \neq 0$) непрерывных функций $f_1(\overline{x})$ и $f_2(\overline{x})$ являются непрерывными функциями.

***<u>Теорема 19.3.</u>* Если** $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$ **непрерывно в точке** $\overline{a} \in R^n, \overline{b} = \overline{f}(\overline{a})$**, отображение** $\overline{z} = \overline{g}(\overline{y})$ **непрерывно в точке** $\overline{b} \in R^m$**, то отображение** $\overline{z} = \overline{g}(\overline{f}(\overline{x}))$ **непрерывно в точке** $\overline{a}$**.**

►**Доказательство.** Для всякой окрестности $W_\varepsilon(\overline{g}(\overline{b}))$ существует $V_\gamma(\overline{b})$ такая, что $\forall\overline{y} \in V_\gamma(\overline{b})\ \ g(\overline{y}) \in W_\varepsilon(g(\overline{b}))$. Но $\forall V_\gamma(\overline{b})\ \ \exists U_\delta(\overline{a}): \forall\overline{x} \in U_\delta(\overline{a})\ \ \overline{f}(\overline{x}) \in V_\gamma(\overline{b})$. Эта окрестность $U_\delta(\overline{a})$ - искомая, т.к. $\overline{f}(\overline{x}) \in V_\gamma(\overline{b}) \Rightarrow \overline{g}(\overline{f}(\overline{x})) \in W_\varepsilon(\overline{g}(\overline{b}))$.◄

<u>Теорема 19.4. (Теорема о сохранении знака непрерывной функции).</u> **Если** $f \in C(\overline{a}), f(\overline{a}) \neq 0,$ **то** $\exists U(\overline{a}): \forall\overline{x} \in U(\overline{a})\ \ f(\overline{x}) - f(\overline{a}) > 0$**.**

►**Доказательство.** Достаточно доказать, что если $f(\overline{a}) > 0$, то и $f(\overline{x}) > 0$. Действительно, взяв $\varepsilon = \dfrac{f(\overline{a})}{2}$ получаем по определению непрерывности окрестность $U(\overline{a})$ такую что $\forall \overline{x} \in U(\overline{a})$: $\left|f(\overline{x}) - f(\overline{a})\right| < \dfrac{f(\overline{a})}{2} \Rightarrow f(\overline{x}) > \dfrac{f(\overline{a})}{2} > 0$.◄

<u>Теорема 19.5.</u> **(без доказательства) Непрерывный образ компактного множества есть компактное множество.**

Замечание. *Эта теорема непосредственно обобщает теоремы 1 семестра о том, что непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает наибольшего и наименьшего значений.*

<u>Теорема 19.6.</u> **(без доказательства) Непрерывный образ связного множества (т.е. множества, любые 2 точки которого можно соединить кривой, целиком лежащей внутри этого множества) есть связное множество.**

Замечание. *Эта теорема обобщает теорему 1 семестра о том, что непрерывная на отрезке функция принимает все свои промежуточные значения.*

<u>Теорема 19.7. (Теорема Кантора).</u> **Непрерывная на компактном множестве K функция равномерно непрерывна на нем, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta$ $\left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \varepsilon$.**

Билет 20. Дифференцируемость функции многих переменных. Частные производные.

Пусть $f(\overline{x})$ определена в некоторой окрестности точки $\overline{a} \in R^n$, $\overline{x}$ - точка из этой окрестности.

Определение 20.1. Величина $f(\overline{x}) - f(\overline{a}) = \Delta f(\overline{a})$ называется ***приращением*** функции f в точке, $\overline{a}$ соответствующим приращению аргумента $\overline{x} - \overline{a} = \Delta\overline{x}$.

Определение 20.2. Функция $f(\overline{x})$ называется ***дифференцируемой*** в точке $\overline{a}$, если существуют такие постоянные числа $A_1,...,A_n$ и функции $\alpha_i = \alpha_i(\overline{x}),\ \alpha_i(\overline{x}) \to 0$ при $\overline{x} \to \overline{a},\ i = 1,...,n$

$$\Delta f(\overline{a}) = A_1(x_1 - a_1) + ... + A_n(x_n - a_n) + \alpha_1(x_1 - a_1) + ... + \alpha_n(x_n - a_n) \qquad (1)$$

Часто обозначают $\Delta\overline{x} = \overline{x} - \overline{a}$ и $\Delta\overline{x}_i = \overline{x}_i - \overline{a}_i, i = 1,...,n$. Тогда (1) перепишем в виде $\Delta f(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\overline{x})\Delta x_i,\ \alpha_i(\overline{x}) \to 0,\ \overline{x} \to \overline{a},\ i = 1,...,n$.

При $n = 1$ наше определение (1) совпадает с известным из материалов 1-го семестра определением дифференцируемости $f(x)$. Для функций одной переменной дифференцируемость равносильна существованию производной. В случае нескольких переменных ситуация немного сложнее.

Сначала введем в рассмотрение величину $\Delta_i f(\overline{a}) = f(a_1,...,a_{i-1}, x_i, a_{i+1},...a_n)$. Она представляет собой приращение функции при фиксированных значениях всех производных, кроме *i*-той.

Пусть $f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{a}$. Тогда для любого $i,\ i = 1,...,n$ равенство (1) дает:

$$\Delta_i f(\overline{a}) = A_i(x_i - a_i) + \alpha_i(\overline{x})(x_i - a_i) \text{ при } \overline{x} \to \overline{a} \qquad (2)$$

Поскольку $\overline{x} \to \overline{a}$ при фиксированных значениях $x_j \equiv a_j, j \neq i$ равносильно тому, что $x_i \to a_i$, равенство (2) означает, что функция одной переменной x_i.

$f(a_1,...,a_{i-1}, x_i, a_{i+1},...a_n)$ дифференцируема в точке a_i и, значит, существует

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{\Delta_i f(\overline{a})}{x_i - a_i} \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a}) = A_i \qquad (3)$$

называемый, по определению, частной производной функции f по переменной x_i в точке $\overline{a}$.

Мы только что, тем самым, доказали теорему:

Теорема 20.1. **Если $f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{a}$, то для всех i, $i=1,...,n$ существуют $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$.**

Таким образом, существование частных производных – ***необходимое*** условие дифференцируемости. При этом $\Delta f(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\overline{x})\Delta x_i, \quad \alpha_i(\overline{x}) \to 0,$ при $\overline{x}\to\overline{a}$.

Другое необходимое условие дифференцируемости – непрерывность функции, как показывает следующая теорема.

Теорема 20.2. **Если $f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{a}$, то $f\in C(\overline{a})$.**

►**Доказательство.** Достаточно доказать, что при $\overline{x}\to\overline{a}$, $\Delta f(\overline{a})\to 0$, (т.к. $f(\overline{x})-f(\overline{a})=\Delta f(\overline{a})$). Но это сразу следует из равенства (1), так как $\lim\limits_{x\to a}\Delta x_i = 0$.◄

Однако, в отличие от случая $n=1$, из существования частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$, определенных равенством (3) ***не следует*** даже непрерывность функции $f(\overline{x})$ в точке $\overline{a}$ и тем более не следует дифференцируемость $f(\overline{x})$ в точке $\overline{a}$, согласно теореме 20.2.

Пример. $n=2,\ f(x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x_1x_2=0\\ 1, & x_1x_2\neq 0\end{cases}$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0{,}0)=\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(\Delta x_1,0)-f(0,0)}{\Delta x_1}=0$, так как $f(\Delta x_1,0)=0\ (\Delta x_1\cdot 0=0)$. Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0{,}0)=0$. Однако $f(x_1,x_2)$ даже не непрерывна в точке $(0{,}0)$.

Достаточное условие дифференцируемости дает следующая теорема.

Теорема 20.3. **Пусть частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ существуют в окрестности точки $\overline{a}$ и непрерывны в этой точке. Тогда $f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{a}$.**

►**Доказательство**. Пусть $\overline{x}$ принадлежит рассматриваемой окрестности $\overline{a}$. При этом все точки $(a_1,x_2,...,x_n),(a_1,a_2,x_3...,x_n),(a_1,...,a_{n-1},x_n)$ так же принадлежат рассматриваемой окрестности. Приращение функции $f(\overline{x})-f(\overline{a})$ представим в виде:

$$f(x_1,...,x_n)-f(a_1,x_2,...,x_n)+f(a_1,a_2,x_3,...,x_n)+...+f(a_1,...,a_{n-1},x_n)-f(a_1,...,a_n) \quad (4)$$

и рассмотрим разности:

$$f(a_1,...,a_{k-1},x_k,...,x_n)-f(a_1,...,a_k,x_{k+1},...,x_n) \quad (5)$$

составляющие в сумме приращение (4).

Пусть $\phi(x_k) = f(a_1,...,a_{k-1},x_k,...,x_n)$ (то есть фиксируем все переменные, кроме x_k). Тогда рассматриваемая разность (5) имеет вид $\phi(x_k) - \phi(a_k)$. Функция ϕ по условию дифференцируема на отрезке, соединяющим a_k и x_k. Значит, она непрерывна на этом отрезке и можно применить теорему Лагранжа, согласно которой $\phi(x_k) - \phi(a_k) = \phi'(a_k + \Theta_k(x_k - a_k))(x_k - a_k)$, где $0 < \Theta_k < 1$.

Но $\phi'(a_k + \Theta_k(x_k - a_k)) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a_1,...,a_{k-1},a_k + \Theta_k(x_k - a_k),x_{k+1},x_k)$.

По условию непрерывности частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a_1,...,a_k + \Theta_k(x_k - a_k),x_{k+1},x_k) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) + \alpha_k(\overline{x})$, где $\alpha_k(\overline{x}) \to 0$ при $\overline{x} \to \overline{a}$.

Поэтому каждая из разностей (5) имеет вид $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a})(x_k - a_k) + \alpha_k(\overline{x})(x_k - a_k)$, а приращение (4) совпадает с (1) из определения дифференцируемости. Теорема доказана.◄

Замечание 1. *Непрерывность частных производных не является необходимым условием дифференцируемости функций. Например можно доказать, что функция* $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) + y^2 \sin(1/y), \ xy \neq 0; \\ x^2 \sin(1/x), \ x \neq 0 \ y = 0; \\ y^2 \sin(1/y), \ x = 0 \ y \neq 0; \\ 0, \ x = 0 \ y = 0; \end{cases}$ *дифференцируема в точке* $(0,0)$, *но частные производные в этой точке не непрерывны.*

Замечание 2. *Тем не менее, для функции* $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ *частные производные в точке* $(0,0)$ *равны 0, так как* $f(x,0) = 0$ *и* $f(0,y) = 0$ *(в остальных точках* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y_k} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$ *и ясно, что эти производные терпят разрыв в точке* $(0,0)$. *Но приращение* $\sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{0 \cdot 0}$ *не имеет вид* $0x + 0y + \alpha_1(x,y)x + \alpha_2(x,y)y$, *где* $\alpha_1(x,y), \ \alpha_2(x,y) \to 0$ *при* $(x,y) \to (0,0)$. *Действительно, полагая* $y = x$ *и предполагая, что* $\sqrt[3]{xy} = 0x + 0y + \alpha_1(x,y)x + \alpha_2(x,y)y$ *получаем* $\sqrt[3]{x^2} = (\alpha_1(x,x) + \alpha_2(x,x))x$, *или* $1 = (\alpha_1(x,x) + \alpha_2(x,x)) \cdot x^{\frac{1}{3}}$ *что невозможно, так как при* $x \to 0$ *правая часть стремится к 0, а левая нет!*

Билет 21. Достаточные условия дифференцируемости функции.

Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных содержатся в следующей теореме.

Теорема 21.1. **Пусть частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1,\ldots,n$ существуют в окрестности точки $\overline{a}$ и непрерывны в самой точке $\overline{a}$. Тогда f дифференцируема в точке $\overline{a}$.**

► **Доказательство.**

Ограничимся случаем $n = 2$.

Пусть точки (x_1, x_2) и (a_1, a_2) принадлежат рассматриваемой окрестности $U(\overline{a})$ точки $\overline{a}$. Рассмотрим приращение функции в точке (a_1, a_2): $f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)$ и представим его в виде:

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) + f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) \qquad (1)$$

Зафиксировав x_2, рассмотрим функцию от переменной x_1 вида

$$\varphi_1(x_1) = f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) \qquad (2)$$

Поскольку в $U(\overline{a})$ существуют частные производные, функция φ_1 дифференцируема на любом промежутке, содержащем x_1 и a_1. Поэтому применим теорему Лагранжа, согласно которой

$$\varphi_1(x_1) = \varphi_1'(a_1 + \theta_1 \Delta x_1)\Delta x_1, \text{ где } 0 < \theta < 1. \qquad (3)$$

По определению частной производной,

$$\varphi_1'(a_1 + \theta_1 \Delta x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2) \qquad (4)$$

Поэтому

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2)\Delta x_1 \qquad (5)$$

Аналогичным образом,

$$f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2)\Delta x_2 \qquad (6)$$

Из (1), (5) и (6) получаем:

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2)\Delta x_2 \qquad (7)$$

Далее, при $\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ точки $\begin{pmatrix} a_1 + \theta_1 \Delta x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 + \theta_2 \Delta x_2 \end{pmatrix}$ стремятся к точке $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Непрерывность частных производных в этой точке означает, что их можно представить в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + \alpha_1(\Delta x_1, \Delta x_2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2\right) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + \alpha_2(\Delta x_1, \Delta x_2) \qquad (8)$$

где $\alpha_i(\Delta x_1, \Delta x_2) \to 0$ при $\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Из (7) и (8) следует:

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\Delta x_2 + \alpha_1(\Delta x_1, \Delta x_2)\Delta x_1 + \alpha_2(\Delta x_1, \Delta x_2)\Delta x_2,$$

означающее дифференцируемость функции f.◄

Билет 22. Дифференциал. Производная сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

Пусть f определена в некоторой окрестности точки $\overline{a}$, и пусть в этой точке существуют $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$, $i=1,...,n$.

Определение 22.1. Линейная функция от n независимых переменных $h_1,...,h_n$ вида

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a})\cdot h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{a})\cdot h_n \tag{1}$$

называется ***дифференциалом*** f в точке $\overline{a}$ и обозначается $df(\overline{a})$.

Каждую из независимых переменных x_i, $i=1,...,n$ можно рассматривать как функцию x_i, причем $\frac{\partial x_i}{\partial x_i}=1$, $i=1,...,n$, а для любого i и любого $j\neq i$ имеем $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=0$.

Тогда, последовательно выбирая $f=x_i$, $i=1,...,n$ и применяя равенство (1), получаем

$$dx_i=0\cdot h_1+...+1\cdot h_i+0\cdot h_{i+1}+...+0\cdot h_n=h_i. \tag{2}$$

Подставляя в (1) вместо h_i величину dx_i согласно (2), получаем более часто употребляемую запись дифференциала:

$$df(\overline{a})=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a})dx_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{a})dx_n. \tag{3}$$

Обычно величинам переменных h_i придают значения Δx_i приращений независимых переменных, не входящих при добавлении nx к рассматриваемой точке за границу рассматриваемой области. Независимость переменных $x_1,...,x_n$ означает, что если взять какое-то приращение $\Delta\overline{x}=(\Delta x_1,...,\Delta x_n)$, то оно не меняется при переходе от одной точки области к другой (а для зависимых переменных переход к другой точке вызывает соответствующие изменения вектора $\Delta\overline{x}$).

Поэтому выражение (3) можно заменить на

$$df(\overline{a})=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a})\Delta x_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{a})\Delta x_n \tag{4}$$

для независимых переменных $x_1,...,x_n$ (для них, $\Delta x_i=dx_i$).

Вспомним (см. билет 20) определение дифференцируемой функции: ее приращение имело вид

$$\Delta f(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a})\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\Delta x_n + \alpha_1(\Delta\bar{x})\Delta x_1 + \ldots + \alpha_n(\Delta\bar{x})\Delta x_n\,, \qquad (5)$$

где $\alpha_i(\Delta\bar{x}) \to 0$ при $\Delta\bar{x} \to \bar{0}$.

Согласно (4), равенство (5) можно переписать в виде

$$\Delta f(\bar{a}) = df(\bar{a}) + \alpha_1(\Delta\bar{x})\Delta x_1 + \ldots + \alpha_n(\Delta\bar{x})\Delta x_n\,. \qquad (6)$$

Оно означает, что если среди чисел $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})$ есть отличное от нуля, то $df(\bar{a})$ представляет собой главную, притом линейную по $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n$ часть приращения.

Определим (пока формально) вектор $\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\right)$. Тогда $df(\bar{a}) = \left(\nabla f(\bar{a}), d\bar{x}\right)$ (скалярное произведение, причем Вектор градиента служит обобщением понятия производной функции. Напомним, что $df(a) = f'(a)dx$.)

Для отображения $\bar{f}(\bar{x}) = \left(f_1(\bar{x}),\ldots,f_m(\bar{x})\right)$ пространства R^n в R^m, состоящего из дифференцируемых функций, также можно определить дифференциал $d\bar{f}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} df_1(\bar{a}) \\ \ldots \\ df_m(\bar{a}) \end{pmatrix}$.

При этом

$$d\bar{f}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a})dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a})dx_n \\ \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a})dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a})dx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a})\ldots\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a})\ldots\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ \ldots \\ dx_n \end{pmatrix} = Jd\bar{x}\,.$$

Матрица J называется ***матрицей Якоби отображения*** $\bar{f}$ (свойства матрицы Якоби даны в приложении 1 к лекционному материала). Перейдем к вопросу о том, что будет в случае зависимых переменных x_i.

Производная сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала

Допустим, что f дифференцируемая в точке $\overline{a}$ функция, $x_i = x_i(t)$ и $x_i(t_0) = a_i$, причем $x_i(t)$ – дифференцируемые в точке t_0 функции. Положим $F(t) = f(\overline{x}(t))$. Тогда $\Delta F(t_0) = \Delta f(\overline{a}) = f(\overline{x}) - f(\overline{a}) = f(x_1(t),...,x_n(t)) - f(a_1,...,a_n) =$
$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a})(x_1(t) - a_1) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{a})(x_n(t) - a_n) + \alpha_1(\overline{x})(x_1(t) - a_1) + ... + \alpha_n(\overline{x})(x_n(t) - a_n) =$
$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a})(x_1'(t)(t - t_0) + \beta_1(t)(t - t_0)) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{a})(x_n'(t)(t - t_0) + \beta_n(t)(t - t_0)) + \alpha_1(\overline{x}) \cdot$
$\cdot(x_1'(t) + \beta_1(t))(t - t_0) + ... + \alpha_n(\overline{x})(x_n'(t) + \beta_n(t))(t - t_0)$, где $\beta_i \to 0$ при $t \to t_0$.

Правило 1

В определении дифференцируемости можно доопределить функции $\alpha_i(\overline{x})$ в точке $\overline{a}$, положив $\alpha_i(\overline{a}) = 0$. Тогда при $t \to t_0$ $x_i(t) \to a_i$ (а может быть, и ***принимает*** значения a_i). Но тогда $\alpha_i(\overline{x}) \to 0$ (так как $\alpha_i(\overline{x})$ у нас доопределены в точке $\overline{a}$ нулем) и $\lim\limits_{i \to t_0} \frac{\Delta F(t_0)}{t - t_0} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a}) \cdot x_i'(t_0)$, таким образом:

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a}) \cdot x_i'(t_0) \qquad (7)$$

Правило 2

Рассмотрим теперь случай, когда $x_i = x_i(t_1,...,t_k), \quad i = 1,...,n$. Применяя полученное выше правило, получим, в очевидных обозначениях

$$\overline{t^0} = (t_1^0,...,t_n^0), \overline{x}(\overline{t^0}) = \overline{a}, \frac{\partial F(t_1^0,...,t_n^0)}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a}) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(\overline{t^0}) \qquad (8)$$

Равенства (7) и (8) дают ***правила вычисления производных сложных функций***.

Следствие 1. Инвариантность форм первого дифференциала.

Пусть $f = f(\overline{x}), \overline{x} = \overline{x}(t), F(\bar{t}) = f(\overline{x}(\overline{t}))$. Тогда

$$dF(\bar{t}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial t_j} dt_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \right) dt_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} = df .$$

Это означает, что как в случае независимых переменных $x_1,...,x_n$, так и в случае зависимых переменных $df = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Билет 23. Касательная плоскость.

Пусть $z = z(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Докажем, что существует касательная плоскость к этой поверхности в точке (x_0, y_0) и что она задается уравнением:

$$z - z(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (1)$$

По аналогии с одномерным случаем (прямая называется касательной к кривой в точке x_0, если расстояние от точки M до этой прямой представляет собой бесконечно малую более высокого порядка, чем $x - x_0$ при $x \to x_0$. При этом касательная имеет уравнение $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$) будем называть плоскость ***касательной к поверхности*** в точке (x_0, y_0, z_0), если расстояние от точки $M(x, y, z)$ до этой плоскости есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Рассмотрим некоторую плоскость, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0):

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) \qquad (2)$$

Из курса аналитической геометрии известно, что расстояние от точки поверхности $(x, y, z(x, y))$ до плоскости (2) равно (***нормальное уравнение плоскости***):

$$\frac{\left|A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z(x, y) - z(x_0, y_0))\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \qquad (3)$$

Если $z(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то положим в (2)

$$A = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0),\ B = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad (4)$$

и заметим, что:

$$z - z(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \alpha_0(x, y)(x - x_0) + \beta_0(x, y)(y - y_0), \quad (5)$$

где $\alpha_0(x, y), \beta_0(x, y) \to 0$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Тогда из (3), (4), (5) следует, что расстояние от рассматриваемой точки до плоскости есть

$$\frac{\left|\alpha_0(x, y)(x - x_0) + \beta_0(x, y)(y - y_0)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \le \frac{\left|\alpha_0(x, y) + \beta_0(x, y)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$, что

представляет собой бесконечно малую более высокого порядка, чем $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Обратно, если есть касательная плоскость (2), т.е.

$$\frac{\left|A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z(x, y) - z(x_0, y_0))\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} = \alpha_0(x, y)\left|x - x_0\right| + \beta_0(x, y)\left|y - y_0\right|$$, где $\alpha, \beta \to 0$

при $(x, y) \to (x_0, y_0)$ то, раскрывая модуль, получаем, что $z(x, y) - z(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha(x, y)(x - x_0) + \beta(x, y)(y - y_0)$, где $\alpha, \beta \to 0$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$, т.е. z - дифференцируемая в точке (x_0, y_0) функция и $A = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), B = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Билет 24. Производная по направлению, градиент.

Пусть мы снова рассматриваем график функции $z = z(x, y)$ и сечения этой поверхности плоскостями, проходящими через точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости OXY и параллельными оси Z. В сечениях получаются кривые, проходящие через точку (x_0, y_0, z_0). Проекция такой кривой на плоскость OXY есть прямая линия, проходящая через точку M_0. Будем обозначать направляющий вектор этой прямой через $\bar{l}$, а точки прямой – буквами M. Введём понятие величины отрезка M_0M:

$M_0M =$ длине отрезка M_0M со знаком "+", если $\overline{M_0M}$ и $\bar{l}$ имеют одинаковые направления;

$M_0M =$ длине отрезка M_0M со знаком "-", если $\overline{M_0M}$ и $\bar{l}$ имеют разные направления;

Предположим теперь, что мы рассматриваем некоторую плоскость, на ней фиксируем точку M_0 и направление $\bar{l}$. Пусть для этой точки плоскости определена величина $z(M)$ - функция от точки M.

Важно отметить, что пока мы ***не вводим никакой системы координат*** (точки на плоскости, направления и функции от точек можно определить без системы координат).

Рассмотрим теперь точки M, лежащие на прямой, проходящей через M_0 в указанном направлении $\bar{l}$ и соответствующую величину $\dfrac{z(M) - z(M_0)}{M_0M}$; если существует предел этой величины при стремлении M к M_0 вдоль прямой, то он называется производной *z(M)* в точке M_0 по направлению $\bar{l}$ и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial l}(M_0)$. Как мы видим, в определении производной по направлению координаты не участвовали. Однако для получения простой формулы для вычисления этой производной удобно ввести систему координат. Итак, пусть M_0 имеет координаты (x_0, y_0), M – координаты (x, y), $\bar{l}$ имеет координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Тогда, вводя параметризацию $x = x_0 + t\cos\alpha$, $y = y_0 + t\sin\alpha$, для прямой, соединяющей *M0* с *M*, *M0M=t* , получаем:
$\dfrac{z(M) - z(M_0)}{M_0M} = \dfrac{z(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - z(x_0, y_0)}{t} =$ (т. к. мы предположили, что z – дифференцируема в (x_0, y_0))

$$= \frac{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot t\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot t\sin\alpha + \alpha_0(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\cdot t\cos\alpha}{t} +$$

$$+ \frac{\beta_0(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\cdot t\sin\alpha}{t} = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\sin\alpha +$$

$$+ \alpha_0(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\cos\alpha + \beta_0(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\sin\alpha.$$

При $t \to 0$ $(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) \to (x_0, y_0)$ и $\alpha_0, \beta_0 \to 0$. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial l}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{z(M) - z(M_0)}{MM_0} = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\sin\alpha = \left(\nabla z(M_0), \bar{l}\right) \qquad (1)$$

Аналогично, в случае 3-х переменных

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \left(\nabla z(M_0), \bar{l}\right) \qquad (2)$$

Скалярное произведение в правых частях (1) или (2) можно представить как

$$\left|\nabla u\left(M_0\right)\right|\cdot\cos\phi, \tag{3}$$

поскольку $|\bar{l}|=1$, где ϕ - угол между $\nabla u(M_0)$ и заданным направлением $\overleftarrow{l}$.

Мы видим, что выражение (3) имеет наибольшую величину, когда $\cos\phi=1$. Это позволяет определить градиент, как вектор, модуль которого равен наибольшей из величин производных по направлению в этой точке. А направление его как раз такое, в котором производная достигает наибольшей величины. Это определение градиента, в котором не участвуют координаты, позволяет рассматривать его как характеристику функции, ***не зависящую от наблюдателя***.

Установим ряд важных свойств градиента: пусть $f_1(\bar{x})$ и $f_2(\bar{x})$ имеют все частные производные 1-го порядка. Тогда

1. $\nabla\left(f_1(\bar{x})+f_2(\bar{x})\right)=\nabla f_1(\bar{x})+\nabla f_2(\bar{x})$;
2. $\nabla cf(\bar{x})=c\nabla f(\bar{x})$;
3. $\nabla\left(f_1(\bar{x})\cdot f_2(\bar{x})\right)=f_1(\bar{x})\nabla f_2(\bar{x})+f_2(\bar{x})\nabla f_1(\bar{x})$;
4. Если $f_2(\bar{x})\neq 0$, то $\nabla\dfrac{f_1(\bar{x})}{f_2(\bar{x})}=\dfrac{f_2(\bar{x})\nabla f_1(\bar{x})-f_1(\bar{x})\nabla f_2(\bar{x})}{\left(f_2(\bar{x})\right)^2}$;
5. Если $F(u)$ - функция одной переменной, имеющая производную, то $\nabla F\left(f(\bar{x})\right)=F'\left(f(\bar{x})\right)\nabla f(\bar{x})$.

Доказательства всех этих свойств аналогичны. Разберем, например, свойство (3). Пусть, для определенности, $\bar{x}=(x,y,z)$. Тогда, по правилам дифференцирования,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f_1\cdot f_2\right)=f_1\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(f_1\cdot f_2\right)=f_1\frac{\partial f_2}{\partial y}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\left(f_1\cdot f_2\right)=f_1\frac{\partial f_2}{\partial z}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}\ \text{и}$$

$$\nabla\left(f_1\cdot f_2\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f_1\cdot f_2\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(f_1\cdot f_2\right),\ \frac{\partial}{\partial z}\left(f_1\cdot f_2\right)\right)=\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial x},f_1\frac{\partial f_2}{\partial y}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial y},f_1\frac{\partial f_2}{\partial z}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)=$$
$$=f_1\nabla f_2+f_2\nabla f_1$$

Пусть $\bar{r}=(x,y,z),\ \ r=|\bar{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Найдём

$$\nabla r=\nabla\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}r,\frac{\partial}{\partial y}r,\frac{\partial}{\partial z}r\right)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\bar{r}}{r}.$$

Для часто встречающихся в физике радиальных функций $F(r)$ согласно свойству (5) получаем: $\nabla F(r)=F'(r)\nabla r=F'(r)\cdot\dfrac{\bar{r}}{r}$.

Билет 25. Производные высших порядков

Если функция $f(\bar{x})$ обладает в некоторой окрестности точки $\bar{a}$ частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{a})$, а эта производная обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a})$. Далее индуктивным образом можно определить производные более высокого порядка. Возникает вопрос: всегда ли $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a})$

Ответ на него такой: нет, не всегда! Можно показать, что функция $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \; x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, \; x=0, y=0 \end{cases}$ имеет неравные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 25.1. **Пусть $f(x,y)$ определена в открытой области D и пусть в этой области существуют $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Пусть $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда в этой точке $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$**

►Доказательство.

Пусть $h, k \neq 0$ числа такие, что область D содержит все точки из прямоугольника со сторонами от x_0 до $x_0 + h$ и от y_0 до $y_0 + k$.
Пусть $W(h,k) = \frac{1}{hk}\left(f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0,y_0)\right)$.

Положим $\phi(x) = \frac{f(x, y_0+k) - f(x,y_0)}{k}$, $\psi(y) = \frac{f(x_0+h, y) - f(x_0, y)}{h}$; тогда
$W = \frac{1}{k}\left[\frac{\phi(x_0+h)-\phi(x_0)}{h}\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{\psi(y_0+k)-\psi(y_0)}{k}\right]$.

В промежутке $[x_0; x_0+h]$, по условию теоремы, функция $\phi(x)$ имеет производную $\phi'(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)}{k}$ и, значит, $\phi(x)$ непрерывна, причем по теореме Лагранжа $W = \frac{1}{k}\left[\frac{\phi(x_0+h)-\phi(x_0)}{h}\right] = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1 h, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1 h, y_0)\right) =$ (вновь по теореме Лагранжа) $= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\Theta_1 h, y_0+\Theta_2 k)$, где $0<\Theta_1<1$, $0<\Theta_2<1$.

С другой стороны, аналогично, получаем $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(x_0 + \Theta_3 h, y_0 + \Theta_4 k\right)$, где $0 < \Theta_3 < 1$, $0 < \Theta_4 < 1$.

Следовательно, устремляя (h,k) к $(0,0)$, получаем, ввиду непрерывности $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} W = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} W = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$. Таким образом, теорема доказана.◄

Замечание. *По аналогии можно доказать следующую теорему.*

<u>Теорема 25.2.</u> **Пусть $u = f(x_1,...,x_n)$ определена в открытой области $D \subset R^n$ и имеет в этой области всевозможные частные производные до n-го порядка включительно и смешанные производные k-го порядка, причем все эти производные непрерывны в D. При этих условиях значение любой k-ой смешанной производной не зависит от того порядка, в котором производится последовательное дифференцирование.**

Например, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial x}$ и т.п.

25.1. Дифференциалы высших порядков .

Пусть $u = f(\overline{x})$ имеет непрерывные производные в области $D \subset R^n$. Тогда

$$df(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \qquad (1)$$

При этом, если $x_1,...,x_n$ - независимые переменные, то $dx_1,...,dx_n$ можно считать постоянными величинами, не зависящими от $\overline{x}$. Поэтому $d^2 x_i = 0$, $i = 1,....,n$.

Пусть $f(x)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка. Положим по определению

$$d^2 f(\overline{x}) = d\left(df(\overline{x})\right) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} dx_i dx_1 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} dx_i dx_n\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \qquad (2)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $d^2 x_i \equiv 0$.Например:

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2, \text{ при } n=2$$

$$d^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dydz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dxdz., \text{ при } n=3$$

Вообще, легко заметить, что, используя формальную операторную запись,

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f(\bar{x}) \tag{3}$$

Аналогично, полагая $d^k f = d\left(d^{k-1} f\right)$, находим:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f(\bar{x}) \tag{4}$$

(В предположении, что для f существуют частные производные до k - го порядка включительно.)

Доказательство этого утверждения можно провести индукцией по k. Мы не будем подробно останавливаться на этом.

Отметим, что если $x_i = x_i(t_1,\ldots,t_k)$ (т.е. переменные x_i не независимые, а представляют собой функции от других переменных), то, вообще говоря, они не равны 0 и, хотя ввиду инвариантности 1-го дифференциала, формула (1) сохраняется, уже в формулах (2) и (3) (не говоря о (4)) следует внести изменения.

Именно, вместо (3) в этом случае верна формула

$$d^2 f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} d^2 x_i \qquad (5).$$

«Добавок» по отношению к (3) получается, из-за того (см. вывод (2)), что в нашем случае

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} dx_i dx_1 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} dx_i dx_n \right) + \frac{\partial f}{\partial x_i} d^2 x_i .$$

Однако, если $x_i = a_{i,1} t_1 + \ldots + a_{i,k} t_k + b_i$, (6)
то $dx_i = a_{i,1} dt_1 + \ldots + a_{i,k} dt_k$ и $d^2 x_i = d(const) = 0$. Поэтому в случае линейной замены переменных (6) формулы (3) и (4) сохраняются.

25.2. Второй дифференциал функции.

Вернемся к формуле (2). Она означает, что второй дифференциал является квадратичной формой от переменных $dx_1,\ldots,dx_n$. Как известно из курса алгебры, квадратичной форме сопоставляется матрица квадратичной формы, в рассматриваемом случае называемая иногда матрицей Гессе и имеющая вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \quad \cdots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Билет 26. Формула Тейлора

Теорема 26.1.

Пусть функция $f(\overline{x})$ имеет непрерывные производные до n-го порядка включительно в окрестности $U\left(\overline{x_0}\right)$ точки $\overline{x_0}$ и непрерывные производные порядка $n+1$ в $U\left(\overline{x_0}\right)$. Тогда для любой точки $\overline{x} \in U\left(\overline{x_0}\right)$ существует число θ, $0<\theta<1$ такое, что $f\left(\overline{x}\right)=f\left(\overline{x_0}\right)+df\left(\overline{x_0}\right)+\dfrac{d^2 f\left(\overline{x_0}\right)}{2}+\ldots+\dfrac{d^n f\left(\overline{x_0}\right)}{n!}+\dfrac{d^{(n+1)} f\left(\overline{x_0}+\theta\left(\overline{x}-\overline{x_0}\right)\right)}{(n+1)!}$ (1) , где все дифференциалы вычислены при $\Delta\overline{x_0}=\overline{x}-\overline{x_0}$ (2).

►Доказательство.

Соединим в пространстве $\Re^m$ точку $\overline{x_0}$ с точкой $\overline{x}$ прямолинейным отрезком; запишем параметрические уравнения этого отрезка: любая его точка $\overline{x}(t)$ имеет вид

$$x(t)=\overline{x_0}+t\left(\overline{x}-\overline{x_0}\right) \qquad (3)$$

При $t=0$ получаем $\overline{x_0}$, при $t=1$ получаем $\overline{x}$.

Рассмотрим функцию одной переменной $F(t)=f(\overline{x}(t))$, определенную на отрезке $t\in[0,1]$.

Поэтому, при вычислении $d^k F(0)$ получаем, в соответствии с билетом 25, что $d^k F(0)=d^k f(\overline{x})$, $k=1,\ldots,n$. (4)

$$d^{n+1}F(\theta)=d^{n+1}f\left(\overline{x_0}+\theta\left(\overline{x}-\overline{x_0}\right)\right) \qquad (5)$$

Осталось применить к функции $F(t)$ теорему 25.1:

$$F(1)-F(0)=\Delta F(0)=dF(0)+d^2F(0)+\ldots+\frac{d^n F(0)}{n!}+\frac{d^{n+1}F(\theta)}{(n+1)!} \qquad (6)$$

Подставляя в (6) из (4) и (5), получаем утверждение теоремы.◄

Теорема 26.2.

Пусть функция $f(\overline{x})$ имеет непрерывные производные до порядка n включительно в $U\left(\overline{x_0}\right)$ точки $\overline{x}_0$. Тогда $f\left(\overline{x}\right)-f\left(\overline{x_0}\right)=df\left(\overline{x_0}\right)+\ldots+\dfrac{d^n f\left(\overline{x_0}\right)}{n!}+\overset{=}{o}\left(\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-x_{0_i}\right)^2}\right)^k\right)$, где $\overline{x}\to\overline{x_0}$.

Для доказательства достаточно использовать теорему 26.1.

Билет 27. Экстремум функции нескольких переменных.

Пусть $f(\bar{x})$определена в окрестности точки $\bar{x}_0 \in R^n$. Будем говорить, что $\bar{x}_0$- точка минимума (строгого), если для всех $\bar{x}$ из некоторой проколотой окрестности $U(\bar{x}_0)$ $f(\bar{x}) > f(\bar{x}_0)$. Точка $\bar{x}_0$ - точка максимума, если для всех $\bar{x} \in U(\bar{x}_0)$ $f(\bar{x}) < f(\bar{x}_0)$. Точки минимума и максимума обычно называются точками экстремума.

<u>Теорема 27.1.</u> **Если $\bar{x}_0$ - точка экстремума и существует $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = 0$.**

►Доказательство.

Рассмотрим точки, у которых все координаты, кроме i - ой фиксированы и равны координатам точки $\bar{x}_0$, а координата x_i меняется. Тогда функцию $f(x_1^0,...,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,...,x_n^0)$ можно рассматривать как функцию от этой точки. Поэтому производная этой функции равна 0. Вместе с тем она, по определению, есть $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$.

Теорема доказана.◄

Замечание 1. *Разумеется, в точке экстремума частные производные могут и не существовать.*

Пример. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x_0, y_0) = (0,0)$. Эта точка, очевидно, точка минимума, т.к. если хотя бы одно из чисел x, y было отлично от 0, величина $z > 0$. Но $z(x,0) = \sqrt{x^2} = |x|$ и $z(0,y) = \sqrt{y^2} = |y|$, поэтому частные производные в точках $x = 0$ и $y = 0$ не существуют.

Замечание 2*. Если все частные производные в точке экстремума $\bar{x}_0$ существуют, то все они равны 0 и $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$, а также $df(\bar{x}_0) \equiv 0$, как функция от $dx_1,...,dx_n$.*

Замечание 3*. В точке экстремума дифференцируемой функции $z(x,y)$ касательная плоскость параллельна плоскости OXY.*

27.1. Достаточные условия экстремума.

Сначала мы изложим схему исследования функции $f(\bar{x})$ на экстремум. Прежде всего, найдем стационарные точки $\bar{x}_0$, т. е. такие, что $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$ (или $df(\bar{x}_0) = 0$). Затем, предполагая, что $f(\bar{x})$ имеет частные производные до 2-го порядка включительно, непрерывные в стационарных точках, применим в этих точках формулу Тейлора
$\Delta f(\bar{x}_0) = df(\bar{x}_0) + \frac{1}{2} d^2 f(\bar{x}_0 + \Theta \Delta \bar{x}) = (0 < \Theta < 1) = \frac{1}{2} d^2 f(\bar{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\bar{x}) \Delta x_i \Delta x_j$, где $a_{ij}(\bar{x}) \to 0$ при $\Delta \bar{x} \to \bar{0}$.

(Поскольку $\Theta \Delta \bar{x}$ - точка, близкая к 0, а производные 2-го порядка непрерывные и $df(\bar{x}_0) = 0$.) Таким образом, знак приращения совпадает со знаком 2-го дифференциала.

Второй дифференциал есть квадратичная форма от $\Delta x_1,...,\Delta x_n$. Если это – положительно определенная форма, то $\Delta f(\bar{x}_0) > 0$ и в точке $\bar{x}$ - минимум. Если отрицательно определенная, то - максимум. Если форма неопределенная (т.е. меняет знак), то экстремума нет. Для выяснения вопроса определенности формы можно использовать критерий Сильвестра из курса линейной алгебры.

Для этого следует рассмотреть определитель (гессиан)

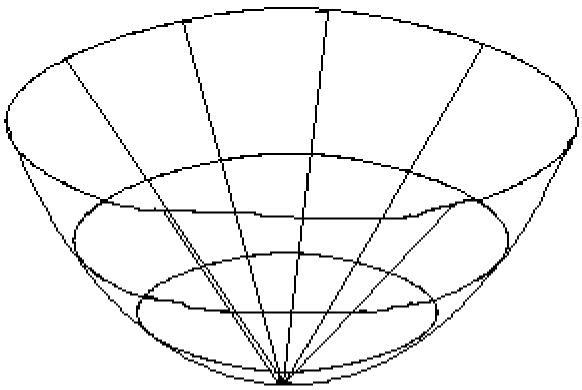
$\begin{vmatrix} f_{11} \cdots f_{1n} \\ \vdots \\ f_{1n} \cdots f_{nn} \end{vmatrix}$, где f_{ij} обозначают производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0)$ и его главные миноры,

т.е. f_{11}, $\begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \\ f_{12} f_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \\ f_{12} f_{22} f_{23} \\ f_{13} f_{23} f_{13} \end{vmatrix}$,...,$\begin{vmatrix} f_{11} \cdots f_{1n} \\ \vdots \\ f_{1n} \cdots f_{nn} \end{vmatrix}$.

Если все эти миноры положительные, то $\bar{x}^0$ - точка минимума.
Если знаки этих миноров чередуются, начиная со знака «-» - то $\bar{x}^0$ - точка максимума.

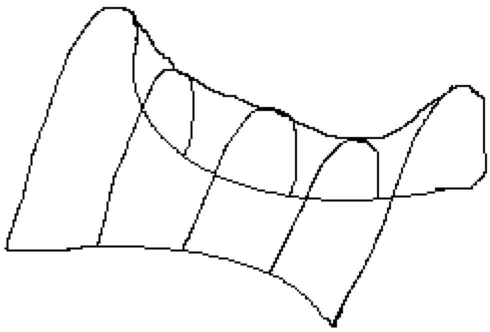
В двумерном случае имеем геометрическую иллюстрацию. При данных условиях в окрестности точки экстремума график функции $z = z(x, y)$ имеет вид «почти» эллиптического параболоида:

- **<u>В случае точки минимума</u>**



- **<u>В случае точки максимума</u>**

Если же график «почти» гиперболического параболоида (седло), то экстремума нет.



Билет 29. Неявная функция.

Термин «неявная функция» относится к способу задания функциональной зависимости между x и y и означает, что вместо явной формулы $y=f(x)$ эта зависимость представлена уравнением $F(x,y)=0$.

Следует отметить, что уравнение $F(x,y)=0$ не всегда определяет функцию $y=f(x)$. Например, уравнение $x=1$ функцию $y=f(x)$ не определяет.

Кроме того, уравнение $F(x,y)=0$ не всегда позволяет однозначно выразить y через x. Например, уравнение $x^2+y^2=1$, задающее окружность на плоскости, определяет при $-1\le x\le 1$ две непрерывные функции $y_1=\sqrt{1-x^2}$ и $y_2=-\sqrt{1-x^2}$.

В этом примере можно, например, дополнительно потребовать, чтобы выполнялось неравенство $y\ge 0$. Тогда мы получим только $y_1=\sqrt{1-x^2}$.

В общей ситуации условия, при которых существует единственная функция $y=f(x)$, задаваемая уравнением $F(x,y)=0$ задает следующая теорема.

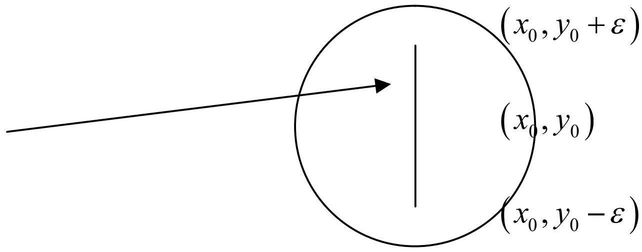
<u>Теорема 29.1.</u> **Пусть $F(x,y)$ определена и непрерывна вместе с частными производными $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ в окрестности точки (x_0,y_0), такой, что $F(x_0,y_0)=0$ и $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\ne 0$. Тогда существуют числа ε и δ такие, что на множестве $|x-x_0|\le\delta,\ |y-y_0|\le\varepsilon$ уравнение $F(x,y)=0$ равносильно уравнению $y=f(x)$ где $f(x)$ непрерывная и дифференцируемая на $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ функция, и $f'(x)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.**

Замечание. *Равносильность $F(x,y)=0$ и $y=f(x)$ означает, что уравнение $F(x,y)=0$ однозначно определяет в рассматриваемой области дифференцируемую функцию $y=f(x)$ такую, что $y_0=f(x_0)$, вообще, $F(x,f(x))\equiv 0$ при $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$.*

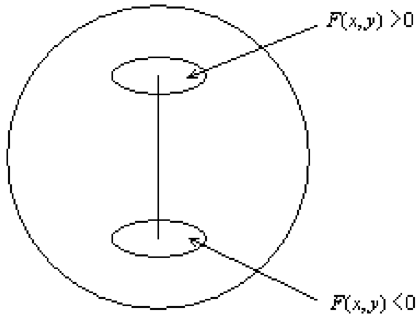
►**Доказательство.** По условию $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\ne 0$. Пусть, для определенности, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)>0$. Ввиду непрерывности $\frac{\partial F}{\partial y}$, это неравенство выполняется при всех (x,y) из некоторой окрестности точки (x_0,y_0).

Следовательно, $\exists \varepsilon > 0$ такое, что функция $F(x_0, y)$ обладает на отрезке $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ положительной производной и, значит, возрастает. Поскольку $F(x_0, y_0)$, из этого следует, что при $y_0 - \varepsilon \le y \le y_0$ функция $F(x_0, y) < 0$, а при $y_0 \le y \le y_0 + \varepsilon$ $F(x_0, y) > 0$.

Окрестность, где $\dfrac{\partial F}{\partial x} > 0$

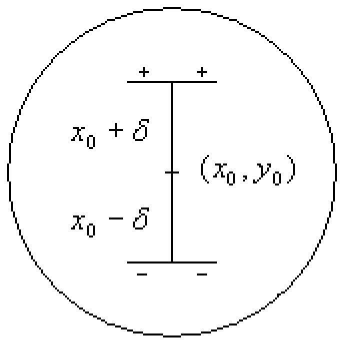


Далее, $F(x, y)$ - также непрерывна. Поэтому она сохраняет знак в некоторой окрестности любой точки, где она положительна или отрицательна.



Значит, можно выбрать δ так, чтобы

$$\begin{cases} F(x, y_0 + \varepsilon) \\ F(x, y_0 + \varepsilon) \end{cases}, \ x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$$



При любом фиксированном $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ функция $F(x, y)$ возрастает на $[y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon]$. При этом $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0,\ F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$. Поэтому существует, притом единственное значение y такое, что $F(x, y) = 0$. Это значение соответствует точке x. Это соответствие и обозначается $y = f(x)$.

Таким образом, искомая функция построена. При этом, по построению $F(x, f(x)) \equiv 0$ при $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$.

Докажем, что $f(x)$ непрерывна. Пусть приращению Δx соответствует приращение Δy. При этом $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$ по построению $f(x)$. Но F - дифференцируемая функция, поэтому

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y \qquad (3),$$

где $\alpha, \beta \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Так как по построению окрестности $\dfrac{\partial F}{\partial y} \ne 0$, из равенства (3) следует, что при $\Delta x \to 0$ также и $\Delta y \to 0$, что означает непрерывность построенной $f(x)$.

$(\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x))$.

Из равенства (3) следует, что $\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)+\beta\right)\Delta y=\left(-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)-\alpha\right)\Delta x$, т.к. $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$, α и $\beta\to 0$ при достаточно малых Δx (а значит, по доказанному выше, и Δy) коэффициент при Δy отличен от 0 и $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+\alpha}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)+\beta}$. Значит, $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$. Теорема доказана.◄

Аналогичными рассуждениями можно доказать такую теорему:

<u>Теорема 29.2.</u> **Пусть функция $F(x_1,...,x_n,y)$ непрерывна и имеет все непрерывные частные производные в окрестности точки $(x_1^0,...,x_n^0,y^0)$ такой, что $F(x_1^0,...,x_n^0,y^0)=0$, причем $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^0,...,x_n^0,y^0)\neq 0$. Тогда существуют числа $\delta_1,...,\delta_n$, ε такие, что в области $\left|x_i-x_i^0\right|\le\delta_i$, $i=1,...,n$, $\left|y-y^0\right|<\varepsilon$ уравнение $F(x_1,...,x_n,y)=0$ равносильно уравнению $y=f(x_1,...,x_n)$, причем функция $f(x_1,...,x_n)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные, причем**

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,...,x_n)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,...,x_n,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,...,x_n,y)}.$$

Билет 30. Система неявных функций

Важную роль играет аналогичная теорема для ***системы*** уравнений. Сформулируем некоторый частный случай подобной теоремы.

Теорема 30.1. ***Пусть*** $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ **(1),**

где функции x, y, z непрерывны и имеют непрерывные производные в некоторой области $D \subset R^2$ (точки $(u,v) \in D$). Пусть матрица Якоби J имеет в этой области ранг 2. $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$**. Тогда, если, например, минор** $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$**, то в области D систему (1) можно преобразовать к уравнению**

$z = z(x,y)$ **(2),**

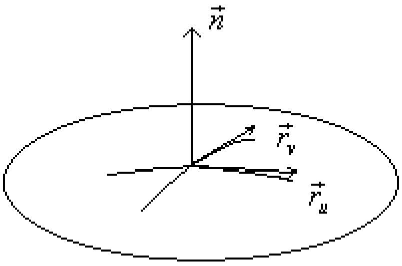
причем z есть непрерывно дифференцируемая функция от x, y и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(3).}$$

Теорема дана БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, однако ниже, в замечании, приведена её геометрическая иллюстрация.

Замечание. *Уравнения (1) представляют собой так называемое параметрическое задание поверхности. Уравнение (2) – это задание той же самой поверхности явным уравнением. Часто обозначают* $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$.

Если зафиксировать v_0, то $\vec{r}(u,v_0)$ - координатные линии (аналогично, $\vec{r}(u_0,v)$ при фиксированном u_0 также представляют собой координатные линии). При этом векторы $\vec{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ и $\vec{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ - касательные векторы к координатным линиям. Если взять точку поверхности, соответствующую параметрам (u_0, v_0) и рассмотреть касательную плоскость в этой точке, то векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ лежат в этой плоскости. Если ранг



матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ равен 2, это означает, что $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ не параллельны и их векторное произведение будет представлять собой нормальный вектор к касательной плоскости.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{k} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \qquad (4),$$

где буквы A, B, C обозначают соответствующие определители (у B учтен знак “-“).

Тогда формулы (3) можно переписать в виде $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{C}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{B}{C}$ (5).

При этом если мы хотим рассматривать вместо (4) нормальный вектор единичной длины, то, деля (4) на его модуль, т.е. на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, получаем

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right) \qquad (6).$$

Преобразуем выражение $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. По определению это есть $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = |\vec{r}_u||\vec{r}_v||\sin\phi|$, где ϕ - угол между $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Тогда $A^2 + B^2 + C^2 = (\vec{r}_u)^2 (\vec{r}_v)^2 \sin^2\phi = (\vec{r}_u)^2 (\vec{r}_v)^2 (1 - \cos^2\phi) =$
$= (\vec{r}_u)^2 (\vec{r}_v)^2 - \left((\vec{r}_u)(\vec{r}_v)\cos\phi \right)^2 = (\vec{r}_u)^2 (\vec{r}_v)^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2 = EG - F^2$, где

$$E = (\vec{r}_u)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \; G = (\vec{r}_v)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \qquad (7).$$

30.1. Приложения доказанных теорем

Задача. Дано уравнение $\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = arctg\frac{y}{x}$. Найти y', y''.

Решение. Приведем уравнение к виду $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - arctg\frac{y}{x} = 0$.

При $x \neq 0$ левая часть – непрерывная функция. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\left(-y/x^2\right)}{1 + y^2/x^2} = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$;

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{1/x}{1 + y^2/x^2} = \frac{y - x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, если $y \neq x$.

Итак, если $x \neq 0$ и $y \neq x$, то рассматриваемое уравнение определяет y как функцию от x, и $y' = -\dfrac{x+y}{y-x} = \dfrac{x+y}{x-y}$ (8).

Для подсчета второй производной:

$y'' = (y')' = \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)' = \dfrac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$, согласно (8).

Задача. Пусть $\begin{cases} x = u + \ln v \\ y = v - \ln u \\ z = 2u + v \end{cases}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке, соответствующей $u = 1, v = 1$.

Решение. Справедливы все условия теоремы 30.1, т.к. $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (производные вычислены в точке $u = 1, v = 1$ и ранг этой матрицы равен 2). $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}$.

30.2. Замена переменных

Задача. Преобразовать уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x+y}{x-y} \qquad (9)$$

к полярным координатам.

Решение. $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $dx = dr\cos\phi - r\sin\phi d\phi$, $dy = dr\sin\phi + r\cos\phi d\phi$, и (9) принимает вид: $\dfrac{dr\sin\phi + r\cos\phi d\phi}{dr\cos\phi - r\sin\phi d\phi} = \dfrac{\cos\phi + \sin\phi}{\cos\phi - \sin\phi}$ или $dr = rd\varphi$.

Задача. Преобразовать уравнение $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$, считая новой функцией

$$w = \ln z - (x+y) \qquad (10),$$

новыми независимыми переменными $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ (11).

Решение. Согласно (13) $dw = \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy\right) - dx - dy$ (12).

С другой стороны, $dw = \dfrac{\partial w}{\partial u}du + \dfrac{\partial w}{\partial v}dv = \dfrac{\partial w}{\partial u}(2xdx + 2ydy) + \dfrac{\partial w}{\partial v}\left(-\dfrac{dx}{x^2} - \dfrac{dy}{y^2}\right) =$

$$= \left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx + \left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dy \qquad (13).$$

Из (10) и (11) получаем: $\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-1=2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}-1=2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}$.

Откуда $y\frac{\partial z}{\partial x}=yz+yz\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)$, $x\frac{\partial z}{\partial y}=xz+xz\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)$ и

$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z+\left(\frac{xz}{y^2}-\frac{yz}{x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial v}$.

Поэтому исходное уравнение можно заменить уравнением $\left(\frac{zx}{y^2}-\frac{yz}{x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial v}=0$. Оно равносильно совокупности уравнений $\frac{zx}{y^2}-\frac{yz}{x^2}=0$ и $\frac{\partial w}{\partial v}=0$, что и дает искомый результат.

Билет 31. Условный экстремум

31.1. Определение условного экстремума

Пусть дана функция $f(x_1,\ldots,x_{n+m})$ и предположим, что переменные $x_1,\ldots,x_{n+m}$ удовлетворяют уравнениям связи

$$\Phi_i\left(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+m}\right)=0,\ i=1,\ldots,m \qquad (1).$$

Определение 31.1. В точке $\left(x_1^0,\ldots x_{n+m}^0\right)$, удовлетворяющей уравнениям (1) функция $f(x_1,\ldots,x_{n+m})$ имеет условный минимум (максимум), если неравенство $f(x_1,\ldots,x_{n+m})\le f\left(x_1^0,\ldots,x_{n+m}^0\right)$ ($f(x_1,\ldots,x_{n+m})\ge f\left(x_1^0,\ldots,x_{n+m}^0\right)$) выполняется в некоторой окрестности точки M_0 для всех точек $(x_1,\ldots,x_{n+m})$, удовлетворяющих (1).

Для упрощения выкладок рассмотрим случай функции $f(x,y,z,t)$ и 2-х уравнений связи $F(x,y,z,t)=0$, $G(x,y,z,t)=0$. Предположим, что f,F,G обладают непрерывными частными производными, причем ранг матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial t} \end{pmatrix}$ равен 2. Для определенности, пусть $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial t} \end{vmatrix}\ne 0$. Тогда по теореме о системе неявных уравнений $z=z(x,y)$, $t=t(x,y)$, где z, t – непрерывные дифференцируемые функции и условный экстремум функции $f(x,y,z,t)$ совпадает с экстремумом функции $f(x,y,z(x,y),t(x,y))=\phi(x,y)$. Стало быть, должны выполняться условия $\frac{\partial\phi}{\partial x}=0$, $\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$, т.е. $d\phi(x,y)=0$ (2).

Иными словами, $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0$. Для нахождения $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$ воспользуемся уравнениями связи

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial t}dt=0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial z}dz+\frac{\partial G}{\partial t}dt=0 \end{cases} \qquad (3).$$

Из этой системы можно ***линейно*** выразить dz и dt через dx и dy, что и дает искомое выражение для $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$.

Есть, однако, специальный прием, называемый методом неопределенных множителей Лагранжа, который позволяет обойтись без решения этой системы. По инвариантности формы дифференциала, условие $d\phi(x,y)=0$ равносильно условию $df(x,y,z,t)=0$, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0 \qquad (4).$$

Умножим уравнения (3) на λ и μ соответственно и сложим с (4):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial G}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\mu\frac{\partial G}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}+\mu\frac{\partial G}{\partial z}\right)dz+\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\lambda\frac{\partial F}{\partial t}+\mu\frac{\partial G}{\partial t}\right)dt=0 \qquad (5).$$

Выберем λ и μ так, чтобы коэффициенты при dz и dt одновременно обращались в 0. Это можно сделать потому, что определитель системы

$$\begin{cases}\lambda\dfrac{\partial F}{\partial z}+\mu\dfrac{\partial G}{\partial z}=-\dfrac{\partial f}{\partial z}\\ \lambda\dfrac{\partial F}{\partial t}+\mu\dfrac{\partial G}{\partial t}=-\dfrac{\partial f}{\partial t}\end{cases} \qquad (6)$$

не равен 0.

Тогда (5) примет вид $\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial G}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\mu\frac{\partial G}{\partial y}\right)dy=0$, где dx,dy – дифференциалы ***независимых*** переменных. Поэтому и

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial F}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial G}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial F}{\partial y}+\mu\dfrac{\partial G}{\partial y}=0\end{cases} \qquad (7).$$

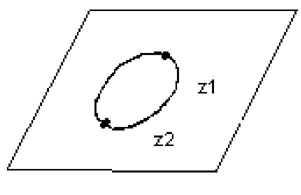
Таким образом, необходимые условия экстремума вспомогательной функции $\Phi(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda F(x,y,z,t)+\mu G(x,y,z,t)$ совпадают с уравнениями (6) и (7) и, тем самым, с необходимыми условиями условного экстремума.

Достаточные условия получаются при исследовании 2-го дифференциала.

Пример 1. Найти экстремум функции $z=x+y$ при условии $x^2+y^2=1$.

Дадим 2 решения этой задачи.

Решение 1 Основано на том, что уравнение связи можно решить: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ и получить, соответственно, 2 функции от x: $z_1=x+\sqrt{1-x^2}$, $z_2=x-\sqrt{1-x^2}$. Первая из них имеет максимум в точке $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, вторая – минимум в точке $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Решение 2. Строим $\Phi(x,y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda}, \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \\ \dfrac{2}{4\lambda^2} = 1; \lambda^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

При $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ получаем $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. При $\lambda = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Выясним, что происходит в этих точках. С этой целью найдем $d^2\Phi$. $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0, \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2\lambda$. Из условия $x^2 + y^2 = 1$ следует $2xdx + 2ydy = 0$, $xdx + ydy = 0$ и в точке $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(dx + dy) = 0$, т.е. $dy = -dx$. В точке $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(dx + dy) = 0$, т.е. снова $dy = -dx$.

Поэтому $d^2\Phi = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dx^2 = 4\lambda dx^2$, и в точке $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ получается: $-2\sqrt{2}dx^2 < 0$, т.е. максимум, а в точке $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – получается $2\sqrt{2}dx^2 > 0$, т.е. минимум.

Вопрос о том, нет ли среди уравнений связи лишних, решается с помощью приема, описанного в конце билета (независимость функций)

31.2. Достаточные условия существования экстремума (условного).

Для простоты изложения ограничимся функцией $f = f(x_1, x_2)$ от двух переменных, подчиненных условию $g(x_1, x_2)$. Предполагаем, что функции f, g обладают непрерывными производными до второго порядка включительно и обозначаем, например, $g_i = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}; f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i},\ i = 1,\ 2; f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и т.п. Для нахождения точки, в которой возможен условный экстремум, используем метод множителей Лагранжа, описанный ниже.

Строим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2).$$

(отметим, что иногда пишут $f(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2)$. Никакой разницы это не даст, т.к. уравнение $g(x_1, x_2) = 0$ равносильно уравнению $-g(x_1, x_2) = 0$).

Точки, в которых может быть условный экстремум, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = f_1 + \lambda g_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = f_2 + \lambda g_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = g = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы выяснить, есть ли экстремум в найденной точке $\bar{x}^o$ (или одной из найденных точек, если система имеет не одно решение), следует использовать второй дифференциал, как и в случае обычного экстремума. Однако в рассматриваемом случае $g(x_1, x_2) = 0$, откуда дифференцируя, находим $g_1 dx_1 + g_2 dx_2 = 0$, или, например, $dx_2 = -\dfrac{g_1}{g_2} dx_1$.

Кроме того, при условии $g(x_1, x_2) = 0$ рассматриваемая функция $L(x_1, x_2)$ просто совпадает с $f(x_1, x_2)$ и поэтому $L_i = f_i$, $L_{ij} = f_{ij}$, где производные вычислены в исследуемой точке $\bar{x}^o$.

Итак, $d^2 f = d^2 L = f_{11} dx_1^2 + 2 f_{12} dx_1 dx_2 + f_{22} dx_2^2 = \left(f_{11} + 2 f_{12} \cdot \left(-\dfrac{g_1}{g_2} \right) + f_{22} \cdot \left(\dfrac{g_1}{g_2} \right)^2 \right) dx_1^2 =$

$$= \left(f_{11} g_2^2 - 2 f_{12} g_1 g_2 + f_{22} g_1^{\,2} \right) \frac{dx_1^2}{g_2^2}$$

Знак $d^2 f$ (при условии что переменные x_1, x_2 связаны уравнением $g(x_1, x_2) = 0$, откуда $dx_2 = -\left(\dfrac{g_1}{g_2} \right) dx_1$) совпадает со знаком величины

$$f_{11} g_2^2 - 2 f_{12} g_1 g_2 + f_{22} g_1^2 \tag{8}$$

Для удобства запоминания рассмотрим определитель, (иногда называемый ***окаймленный гессиан***):

$$\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} \\ g_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} =$$

(напомним, что в исследуемой точке $d^2 f = d^2 L$, поэтому $L_{ij} = f_{ij}$)

(разложение по первой строке)

$$=-g_1\begin{vmatrix} g_1 & f_{12} \\ g_2 & f_{22}\end{vmatrix}+g_2\begin{vmatrix} g_1 & f_{11} \\ g_2 & f_{12}\end{vmatrix}=-g_1^2f_{22}+f_{12}g_1g_2+g_1g_2f_{12}-g_2^2f_{11}= \\ =-\left(g_1^2f_{22}-2f_{12}g_1g_2+g_2^2f_{11}\right) \qquad (9)$$

Сравнивая (8) и (9) видим, что в рассматриваемой задаче знак второго дифференциала противоположен знаку окаймленного гессиана.

Поэтому если $\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{12} & L_{22}\end{vmatrix}>0$, то $d^2f<0$ и в точке $\bar{x}^o$ есть условный максимум, если $\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{12} & L_{22}\end{vmatrix}<0$, то $d^2f>0$ и в точке $\bar{x}^o$ есть условный минимум. Вновь обратим внимание на то, что если уравнение связи $g(x_1,x_2)=0$ можно решить, выразив, например $x_2=x_2(x_1)$, то вопрос об условном экстремуме сведется к исследованию на экстремум обычных функций от одной переменной.

Далее: **НА ЭКЗАМЕНЕ НЕОБЯЗАТЕЛЬНО**!

31.3. Понятие независимости функций

Рассмотрим систему функций

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m=f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n), \end{cases} \qquad (10)$$

определенных и непрерывных, вместе со своими частными производными, в некоторой n-мерной открытой области D.

Рассмотрим случай, когда значение одной из них, например y_1, однозначно определяется совокупностью тех значений, которые принимают остальные функции

$(y_1,\ldots,y_{j-1},y_{j+1},\ldots,y_m)$.

Точнее говоря, если $\Im_0$ есть множество таких $(m-1)$-мерных точек, отвечающих всевозможным точкам $(x_1,\ldots,x_n)$ в D, то предполагается что в $\Im_0$ будет иметь место функциональная зависимость

$$y_j=\varphi(y_1,\ldots,y_{j-1},y_{j+1},\ldots,y_m), \qquad (11)$$

причем это равенство оказывается тождеством относительно x в D, если вместо всех y_1, подставить функции (10). Тогда говорят, что в области D функция y_1 зависит от остальных. Впрочем, для того, чтобы иметь возможность применять дифференциальное исчисление, мы включим в определение еще требование, чтобы функция φ была определена и непрерывна со своими частными производными в некоторой открытой области $\mathfrak{I}$ $(m-1)$-мерного пространства, содержащей множество $\mathfrak{I}_0$.

Если, в частности, одна из функций (10), y_j, сводится к постоянной, то она явно будет зависеть от остальных: здесь можно просто положить $\varphi = const$. Функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ называются вообще зависимыми в области D, если одна из них (все равно какая) зависит от остальных.

Примеры.

1) Если предположить

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \\ y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \end{cases}$$

то нетрудно проверить, что во всем n-мерном пространстве будет выполняться тождество $y_2 = y_1^2 - 2y_3$.

2) Аналогично для функций

$$\begin{cases} y_1 = x_1x_2 - x_3 \\ y_2 = x_1x_3 - x_2 \\ y_3 = \left(x_1^3 + 1\right)\left(x_2^2 + x_3^2\right) - \left(x_1^2 - 1\right)x_2x_3 - x_1\left(x_3^2 - x_3\right)^2 \end{cases}$$

имеем тождественно (в трехмерном пространстве)

$$y_3 = y_1^3 - y_1y_2 + y_3^2.$$

Все это – зависимые функции.

Если ни в области D, ни в какой-либо частичной, в ней содержащейся, области не имеет место тождество вида $F\left(x, y_1, ..., y_n\right)$, то функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ называют независимыми в области D.

Ответ на вопрос о независимости функций дает рассмотрение так называемой матрицы Якоби, составленной из частных производных этих функций по всем независимым переменным:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Предполагая $n \geq m$, имеем такую теорему:

<u>**Теорема 31.1.**</u> **Если хоть один определитель m-ого порядка, составленный из элементов матрицы (12), отличен от нуля в области D, то в этой области функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ независимы.**

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad .(13)$$

Если бы не равным нулю был не этот, а какой-нибудь другой определитель, то, изменив нумерацию переменных, можно было бы свести вопрос к случаю (13).

► **Доказательство** теоремы будем вести от противного. Предположим, что одна из функций, например y_m, выражается через остальные, так что

$$y_m = \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}), \qquad (14)$$

хотя бы в некоторой части D_0 области D.

Продифференцировав это тождество по каждой из переменных $x_i (i = 1, \ldots, m)$, мы получим ряд тождеств (в D_0) вида

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_1} = \frac{\partial y_m}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_m}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i}, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Мы видим, что элементы последней строки определителя (13) получаются путем сложения соответственных элементов первых $m-1$ строк, умноженных предварительно на множители $\frac{\partial y_m}{\partial y_1}, \quad \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}$. Такой определитель, как известно, равен нулю. Это противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает невозможность равенства (14).◄

Приложение 1. Матрица Якоби и ее свойства.

Пусть $y_1 = f_1(x_1,...,x_n),..., y_m = f_m(x_1,...,x_n)$ - функции, задающие некоторое отображение из R^n в R^m. Предположим, что эти функции имеют частные производные по всем переменным $x_1,...,x_n$ в некоторой точке $\overline{x^0} = (x_1^0,...,x_n^0)$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x_0})\cdots\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x^0})\cdot \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overline{x_0})\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overline{x^0}) \end{pmatrix}$$

называется матрицей Якоби. В случае $n = m = 1$, т. е., когда рассматривается функция $y = f(x)$, то матрица Якоби состоит из одного элемента $f'(x_0)$. Поэтому эту матрицу можно считать обобщением понятия производной. Как уже отмечалось, для дифференциала отображения, соответствующего приращению $d\overline{x} = (dx_1,...,dx_n)$, имеем

$$d\overline{y} = \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x^0})\cdots\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x^0}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overline{x^0})\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overline{x^0}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $y_1 = f_1(x_1,...,x_n),..., y_m = f_m(x\ )$ и что, в свою очередь, $x_1 = \varphi(t_1,...,t_m),...,\ x_n = \varphi_n(t_1,...,t_m)$ Это приводит к сложному отображению (или композиции отображений) $\overline{y} = \overline{f}(\overline{\varphi}(\overline{t})) = \overline{F}(\overline{t})$, где использованы краткие записи:
$\overline{y} = (y_1,...,y_m),\ \overline{f}(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}),...,f_m(\overline{x}))$,
$\overline{x} = (x_1,...,x_n),\ \overline{\varphi}(\overline{t}) = (\varphi_1(\overline{t}),...,\varphi_m(\overline{t}))$,
$\overline{t} = (t_1,...,t_m),\ \overline{F}(\overline{t}) = (F_1(\overline{t}),...,F_m(\overline{t}))$,
$F_i(\overline{t}) = f_i(\varphi(\overline{t}))$.

Для этого отображения, по теореме о производной сложной функции, $\frac{\partial F_i}{\partial t_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j} + ... + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_j}$,поэтому имеет место равенство:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t_1}\cdots\frac{\partial F_1}{\partial t_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial t_n}\cdots\frac{\partial F_m}{\partial t_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\cdots\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\cdots\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_m} \end{pmatrix}.$$

В случае, когда $m = n$, определитель матрицы Якоби

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(y_1,...,y_n)}{D(x_1,...,x_n)}$$ называется якобианом отображения.

По доказанному, в случае композиции отображений $\bar{y} = \left(f_1(\bar{x}),...,f_m(\bar{x})\right), \bar{x} = \left(\varphi_1(\bar{t}),...,\varphi_m(\bar{t})\right), t = (t_1,...,t_n)$ выполняется равенство

$$\frac{D(y_1,...,y_n)}{D(t_1,...,t_n)} = \frac{D(y_1,...,y_n)}{D(x_1,...,x_n)} \cdot \frac{D(x_1,...,x_n)}{D(t_1,...,t_n)}.$$

Если отображение $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ имеет обратное отображение, т.е. $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{y})$, то $1 = \frac{D(y_1,...,y_n)}{D(y_1,...,y_n)} = \frac{D(y_1,...,y_n)}{D(x_1,...,x_n)} \cdot \frac{D(x_1,...,x_n)}{D(y_1,...,y_n)}$, т.е. $\frac{D(x_1,...,x_n)}{D(y_1,...,y_n)} = \frac{1}{\frac{D(y_1,...,y_n)}{D(x_1,...,x_n)}}$, если $\frac{D(y_1,...,y_n)}{D(x_1,...,x_n)} \neq 0$.

Эта формула обобщает правило для производной обратной функции $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$, если $\frac{dy}{dx} \neq 0$.

Отметим важное правило для вычисления якобиана в случае, когда

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, x_3) \\ x_1 = x_1(t_1, t_2) \\ x_2 = x_2(t_1, t_2) \\ x_3 = x_3(t_1, t_2) \end{cases}$$

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(t_1, t_2)} = \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{D(x_1, x_2)}{D(t_1, t_2)} + \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_2, x_3)}{D(t_1, t_2)} + \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_3, x_1)} \cdot \frac{D(x_3, x_1)}{D(t_1, t_2)}$$

Доказательство этого правила основывается на применении правила дифференцирования сложной функции и последующих алгебраических преобразований. Ввиду громоздкости мы его опускаем.