**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ
МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА**

**МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ
МГУ**

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЧАСТЬ 2

А.И.КОЗКО.Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ,

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам второго курса химического факультета МГУ.

III. Уравнения Бернулли

Если дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

где $n \neq 0, 1$, то уравнение называется ***уравнением Бернулли***. Заметим, что при $n = 0$ получается линейное уравнение, а при $n = 1$ получается уравнение с разделяющимися переменными.

Задача 1. Решить уравнение $xy' + y = -xy^2$.

Уравнение можно переписать в виде

$$y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} \cdot y = \underbrace{-1}_{Q(x)} \cdot y^2$$ – уравнение Бернулли

1) Рассмотрим однородное уравнение $xy' + y = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}dx$ (потеряно решение $y \equiv 0$)

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = -\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Потенцируем это уравнение:

$|y| = |x|^{-1} \cdot e^C,\ C \in \mathbb{R}$

$|y| = C \cdot x^{-1},\ \ C > 0$

$y = \pm Cx^{-1},\ \ C > 0$ и с учетом, что $y \equiv 0$ является решением, окончательно получаем, что

$y = \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать общее решение уравнения $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$ в виде $y = \frac{C(x)}{x}$.

Подставим эту функцию в уравнение $xy' + y = -xy^2$.

Так как в этом случае $y' = \frac{C' \cdot x - C \cdot 1}{x^2} = \frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2}$, то при подстановке в уравнение получаем

$\frac{C'}{x}\cdot x-\frac{C}{x^2}\cdot x+\frac{C}{x}\equiv -x\frac{C^2}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad C'\equiv -\frac{C^2}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $C(x)$.

$\frac{dC}{dx}=-\frac{C^2}{x}$

$-\frac{dC}{C^2}=\frac{1}{x}dx$ (потеряно решение $C(x)\equiv 0$)

$\frac{1}{C(x)}=\ln|x|+C, C\in\mathbb{R}$

$\Longrightarrow \quad C(x)=\frac{1}{\ln|x|+C},\ C\in\mathbb{R}$.

Заметим, что полученное множество функций не содержит «потерянное» решение $C(x)\equiv 0$, поэтому решение исходного уравнения Бернулли $y(x)\equiv 0$ (которое получается из $\frac{C(x)}{x}$ при $C(x)\equiv 0$) придется записывать отдельно.

Итак, общее решение уравнения Бернулли будет иметь вид:

$y=\frac{C(x)}{x}=\frac{1}{x(\ln|x|+C)}$, $C\in\mathbb{R}$; $y(x)\equiv 0$.

Ответ: $y=\frac{1}{x(\ln|x|+C)}$, $C\in\mathbb{R}$; $y(x)\equiv 0$.

Замечание. В случае уравнения Бернулли общее решение уже не будет суммой общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения, что легко видеть на данном примере.

Задача 2. Решить уравнение $x^2y'=y^2+xy$.

Уравнение можно переписать в виде

$$y'-\underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)}\cdot y=\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{Q(x)}\cdot y^2 \text{ – уравнение Бернулли.}$$

1) Рассмотрим однородное уравнение $x^2y'=xy$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$x^2\frac{dy}{dx}=xy$

$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ (потеряно решение $y\equiv 0$)

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$

$\ln|y|=\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Потенцируем это уравнение (мы уже его встречали):

$y = Cx, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать общее решение уравнения $x^2y' = y^2 + xy$ в виде $y = C(x)x$.

Подставим эту функцию в уравнение $x^2y' = y^2 + xy$.

Так как в этом случае $y' = C'x + C$, то при подстановке в уравнение получаем

$x^2(C'x + C) \equiv C^2(x)x^2 + xC(x)x \quad \Longrightarrow \quad C'x \equiv C^2$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $C(x)$.

$\frac{dC}{dx} = \frac{C^2}{x}$

$\frac{dC}{C^2} = \frac{1}{x}dx$ (потеряно решение $C(x) \equiv 0$)

$-\frac{1}{C(x)} = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \quad C(x) = \frac{1}{-\ln|x| - C}, \ C \in \mathbb{R} \ \Longrightarrow \quad C(x) = \frac{1}{-\ln|x| + C}, \ C \in \mathbb{R} \ (-C \to C).$

Заметим, что полученное множество функций не содержит «потерянное» решение $C(x) \equiv 0$, поэтому решение исходного уравнения Бернулли $y(x) \equiv 0$ (которое получается из $y(x) = C(x)x$ при $C(x) \equiv 0$) придется записывать отдельно.

Итак, общее решение уравнения Бернулли будет иметь вид:

$y = C(x)x = \frac{x}{C - \ln|x|}, \ C \in \mathbb{R}; \ \ y(x) \equiv 0.$

Ответ: $y = \frac{1}{x(\ln|x| + C)}, \ C \in \mathbb{R}; \ \ y(x) \equiv 0.$

Задача 3. Решить уравнение $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$.

Уравнение можно переписать в виде

$$y' \underbrace{-x}_{P(x)} \cdot y = \underbrace{-e^{-x^2}}_{Q(x)} \cdot y^3 \text{ – уравнение Бернулли}$$

1) Рассмотрим однородное уравнение $y' - xy = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{dx} = xy$

$\frac{dy}{y} = xdx$ (потеряно решение $y \equiv 0$)

$\int \frac{dy}{y} = \int xdx$

$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Потенцируем это уравнение:

$|y| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^C,\ C \in \mathbb{R}$

$|y| = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}},\ \ C > 0$

$y = \pm Ce^{\frac{x^2}{2}},\ \ C > 0$ и с учетом, что $y \equiv 0$ является решением, окончательно получаем, что

$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать общее решение уравнения $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$ в виде $y = C(x)e^{\frac{x^2}{2}}$.

Подставим эту функцию в уравнение $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$.

Так как в этом случае $y' = C'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + C(x)xe^{\frac{x^2}{2}}$, то при подстановке в уравнение получаем

$$C'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + C(x)xe^{\frac{x^2}{2}} - xC(x)e^{\frac{x^2}{2}} \equiv -\left(C(x)e^{\frac{x^2}{2}}\right)^3 e^{-x^2} \implies$$

$$C'e^{\frac{x^2}{2}} \equiv -C^3e^{\frac{x^2}{2}}$$

$C' = -C^3$– уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $C(x)$.

$\frac{dC}{dx} = -C^3$

$-\frac{dC}{C^3} = dx$ (потеряно решение $C(x) \equiv 0$)

$-\int \frac{dC}{C^3} = \int dx$

$\frac{1}{2C^2(x)} = x + C, C \in \mathbb{R}$

$\implies\ \ C^2(x) = \frac{1}{2x+2C},\ C \in \mathbb{R}$

$\implies\ \ C^2(x) = \frac{1}{2x+C},\ C \in \mathbb{R}\ \ (2C \to C)$

Заметим, что полученное множество функций не содержит «потерянное» решение $C(x) \equiv 0$, поэтому решение исходного уравнения Бернулли $y(x) \equiv 0$

(которое получается из $y(x) = C(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ при $C(x) \equiv 0$) придется записывать отдельно.

Поскольку $y(x) = C(x)e^{\frac{x^2}{2}} \Longrightarrow y^2(x) = C^2(x)e^{x^2}$.

Тогда общее решение уравнения Бернулли будет иметь вид:

$$y^2(x) = C^2(x)e^{x^2} \Longrightarrow y^2(x) = \frac{e^{x^2}}{2x+C}, C \in \mathbb{R} \Longrightarrow y^2(2x+C) = e^{x^2}, C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y^2(2x+C) = e^{x^2},\ C \in \mathbb{R};\quad y(x) \equiv 0$.

Задача 4. Решить уравнение $3y^2y' + y^3 = x + 1$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(1) = -1$.

Уравнение можно переписать в виде

$$y' + \underbrace{\frac{1}{3}}_{P(x)} \cdot y = \underbrace{\frac{1}{3}(x+1)}_{Q(x)} \cdot y^{-2}$$ – уравнение Бернулли

1) Рассмотрим однородное уравнение $3y^2y' + y^3 = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$3\frac{dy}{y} = -dx$ (потеряно решение $y \equiv 0$)

$\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{3}\int xdx$

$\ln|y| = -\frac{1}{3}x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Потенцируем это уравнение:

$|y| = e^{-\frac{x}{3}} \cdot e^C,\ C \in \mathbb{R}$

$|y| = C \cdot e^{-\frac{x}{3}},\ \ C > 0$

$y = \pm Ce^{-\frac{x}{3}},\ \ C > 0$ и с учетом, что $y \equiv 0$ является решением, окончательно получаем, что

$y = Ce^{-\frac{x}{3}}, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать общее решение уравнения $3y^2y' + y^3 = x + 1$ в виде $y = C(x)e^{-\frac{x}{3}}$.

Подставим эту функцию в уравнение $3y^2y' + y^3 = x + 1$.

Так как в этом случае $y' = C'(x)e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3}C(x)e^{-\frac{x}{3}}$, то при подстановке в уравнение получаем

$3\left(C(x)e^{-\frac{x}{3}}\right)^2\left(C'(x)e^{-\frac{x}{3}}-\frac{1}{3}C(x)e^{-\frac{x}{3}}\right)+\left(C(x)e^{-\frac{x}{3}}\right)^3\equiv x+1 \Rightarrow$

$3C'C^2e^{-x}\equiv x+1$

$3C'C^2\equiv(x+1)e^x$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $C(x)$.

$3\frac{dC}{dx}C^2=(x+1)e^x$

$3C^2dC=(x+1)e^xdx$

$3\int C^2dC=\int(x+1)e^xdx.$

Вычислим $\int(x+1)e^xdx=\int(x+1)de^x=$
$=(x+1)e^x-\int(x+1)e^xd(x+1)=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow C^3(x)=xe^x+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Поскольку $y(x)=C(x)e^{-\frac{x}{3}}\Rightarrow y^3(x)=C^3(x)e^{-x}$.

Тогда общее решение уравнения Бернулли будет иметь вид:

$y^3(x)=C^3(x)e^{-x}\Rightarrow y^3(x)=(xe^x+C)e^{-x},C\in\mathbb{R}\ \Rightarrow$
$y^3(x)=x+Ce^{-x},C\in\mathbb{R}$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее условию $y(1)=-1$.

$-1=1+Ce^{-1}\Rightarrow Ce^{-1}=-2\Rightarrow C=-2e.$

Поэтому частное решение уравнения имеет вид

$y_{ч}^3=x-2e\cdot e^{-x}=x-2e^{1-x}$.

Ответ: Общее решение $y^3=x+Ce^{-x},\ C\in\mathbb{R}$; частное решение
$y_{ч}^3=x-2e^{1-x}$.

Задача 5. Решить уравнение $y'+xy=xy^3$.

Уравнение можно записать в виде

$$y'+\underbrace{x}_{P(x)}\cdot y=\underbrace{x}_{Q(x)}\cdot y^3 \text{ – уравнение Бернулли}$$

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'+xy=0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{dx}=-xy$

$\frac{dy}{y}=-xdx$ (потеряно решение $y\equiv0$)

$\int \frac{dy}{y} = -\int x dx$

$\ln|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Потенцируем это уравнение:

$|y| = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^C,\ C \in \mathbb{R}$

$|y| = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\ \ C > 0$

$y = \pm C e^{-\frac{x^2}{2}},\ \ C > 0$ и с учетом, что $y \equiv 0$ является решением, окончательно получаем, что

$y = C e^{-\frac{x^2}{2}}, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать общее решение уравнения $y' + xy = xy^3$ в виде $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Подставим эту функцию в уравнение $y' + xy = xy^3$.

Так как в этом случае $y' = C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - C(x)xe^{\frac{x^2}{2}}$, то при подстановке в уравнение получаем

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - C(x)xe^{-\frac{x^2}{2}} + xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \equiv x\left(C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^3 \ \Rightarrow$$

$C' \equiv xC^3e^{-x^2}$– уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $C(x)$.

$\frac{dC}{dx} = xC^3e^{-x^2}$

$\frac{dC}{C^3} = xe^{-x^2}dx$ (потеряно решение $C(x) \equiv 0$)

$\int \frac{dC}{C^3} = \int xe^{-x^2}dx \ \Rightarrow -\frac{1}{2C^2(x)} = \frac{1}{2}\int e^{-x^2} d\,x^2 \Rightarrow -\frac{1}{2C^2(x)} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C, C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{1}{C^2(x)} = e^{-x^2} + C, C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad C^2(x) = \frac{1}{e^{-x^2}+C},\ C \in \mathbb{R}.$

Заметим, что полученное множество функций не содержит «потерянное» решение $C(x) \equiv 0$, поэтому решение исходного уравнения Бернулли $y(x) \equiv 0$ (которое получается из $y(x) = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ при $C(x) \equiv 0$) придется записывать отдельно.

Поскольку $y(x) = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \Longrightarrow y^2(x) = C^2(x)e^{-x^2}$.

Тогда общее решение уравнения Бернулли будет иметь вид:

$$y^2(x) = C^2(x)e^{-x^2} \Longrightarrow y^2(x) = \frac{e^{-x^2}}{e^{-x^2}+C}, C \in \mathbb{R} \Longrightarrow y^2 = \frac{1}{1+Ce^{x^2}}, C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y^2 = \frac{1}{1+Ce^{x^2}}$, $C \in \mathbb{R}$; $y(x) \equiv 0$.

IV. Уравнения, линейные «относительно x» и уравнения Бернулли «относительно x»

Иногда уравнение не удается записать в одном из видов

$$y' + P(x)y = Q(x) \text{ или } y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

но удается записать в виде

$$x' + P(y)x = Q(y) \text{ или } x' + P(y)x = Q(y)x^n.$$

Тогда мы ищем решение в виде функции $x = x(y)$.

Задача 1. Решить уравнение $y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$.

Это уравнение не является линейным «по y», но является линейным «по x», так как его можно переписать в виде

$x'_y - \frac{2}{y} \cdot x = \frac{3}{y^2}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y^2x'_y - 2xy = 0$.

$y^2\frac{dx}{dy} = 2xy$

$\frac{dx}{x} = 2\frac{dy}{y}$ (потеряны решения $x \equiv 0$ и $y \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение

$\int\frac{dx}{x} = \int 2\frac{dy}{y}$

$\ln|x| = 2\ln|y| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Пропотенцируем полученное уравнение, получим, что решениями однородного уравнения будут $x(y) = Cy^2, C \in \mathbb{R}$ и $y \equiv 0$.

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать решение исходного уравнения $y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$ в виде $x(y) = C(y)y^2$.

Так как в этом случае $x'_y = C'y^2 + 2yC$, то после подстановки в уравнение $y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$ получим

$$y^2(C'y^2 + 2yC) - 2yCy^2 - 3 \equiv 0$$

$$C'y^4 - 3 = 0$$

$$\frac{dC}{dy} = \frac{3}{y^4}.$$

Проинтегрируем это уравнение

$$\int dC = \int \frac{3dy}{y^4}$$

$$C(y) = -\frac{1}{y^3} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Поэтому общее решение исходного уравнения будет иметь вид:

$$x(y) = C(y)y^2 = \left(-\frac{1}{y^3} + C\right)y^2 = Cy^2 - \frac{1}{y}, C \in \mathbb{R} \text{ и } y \equiv 0.$$

Как всегда для линейных уравнений, оно является суммой общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного (исходного) дифференциального уравнения.

Ответ: $x(y) = Cy^2 - \frac{1}{y}, C \in \mathbb{R}, \ y \equiv 0.$

Задача 2. Решить уравнение $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right)dy = 0.$

Это уравнение не является линейным «по y» и не является линейным «по x». Рассмотрим вспомогательное уравнение (которое в отличие от исходного уравнения не имеет решение $y \equiv 0$)

$x'_y + x \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \cdot x^3$ – уравнение Бернулли «по x».

1) Рассмотрим однородное уравнение $yx'_y + x = 0.$

$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$ (потеряно решение $x \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|x| = -\ln|y| + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Пропотенцируем полученное уравнение, получим

$$x(y) = \frac{C}{y}, C \in \mathbb{R}.$$

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать решение исходного уравнения $ydx+\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0$ в виде $x(y)=\frac{C(y)}{y}$.

Заметим сразу, что $x\equiv 0$ и $y\equiv 0$ – решения этого уравнения (в дальнейшем «не будем бояться их потерять»).

Так как в этом случае $x'_y=\frac{C'y-C}{y^2}=\frac{C'}{y}-\frac{C}{y^2}$, то после подстановки в уравнение $ydx+\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0$ получим

$$y\left(\frac{C'}{y}-\frac{C}{y^2}\right)-\frac{C}{y}+\frac{1}{2}\frac{C^3}{y^3}y\equiv 0$$

$$C'=-\frac{1}{2}\frac{C^3}{y^2}$$

$$2\frac{dC}{C^3}=\frac{dy}{y^2}.$$

Проинтегрируем это уравнение

$$-2\int\frac{dC}{C^3}=-\int\frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{1}{C^2(y)}=\frac{1}{y}+C, C\in\mathbb{R}$$

$$C^2(y)=\frac{y}{1+Cy}, C\in\mathbb{R}.$$

Поэтому общее решение исходного уравнения будет иметь вид:

$$x^2(y)=\frac{C^2(y)}{y^2}=\frac{y}{y^2(1+Cy)}=\frac{1}{y(1+Cy)}, C\in\mathbb{R}.$$

Ответ: $x\equiv 0$, $y\equiv 0$, $x^2(y)=\frac{1}{y(1+Cy)}, C\in\mathbb{R}$.

Задача 3. Решить уравнение $(\sin^2 y+x\operatorname{ctg} y)y'=1$.

Вы уже начинаете понимать, что определение типа уравнения является, зачастую, самой сложной частью решения задачи…

Это уравнение является линейным «по x», так как его можно записать в виде

$$\sin^2 y+x\operatorname{ctg} y=\frac{dx}{dy}$$

$$x'_y\underbrace{-\operatorname{ctg} y}_{P(y)}x=\underbrace{\sin^2 y}_{Q(y)}.$$

1) Рассмотрим однородное уравнение $x'_y-x\operatorname{ctg} y=0$.

$\frac{dx}{dy} = x \operatorname{ctg} y$

$\frac{dx}{x} = \operatorname{ctg} y \, dy$ (потеряно решение $x \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{\cos y dy}{\sin y}$

$\ln|x| = \ln|\sin y| + C, \ C \in \mathbb{R}$

$x(y) = C \sin y \, , \ C \in \mathbb{R}.$

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать решение исходного уравнения $x'_y - x \operatorname{ctg} y = \sin^2 y$ в виде $x(y) = C(y) \sin y$.

Так как в этом случае $x'_y = C' \sin y + C \cos y$, то после подстановки в уравнение $x'_y - x \operatorname{ctg} y = \sin^2 y$ получим

$(C' \sin y + C \cos y) - C(y) \sin y \operatorname{ctg} y \equiv \sin^2 y$

$C' \sin y \equiv \sin^2 y$

$C' = \sin y$

$dC = \sin y \, dy.$

Проинтегрируем это уравнение

$\int dC = \int \sin y \, dy$

$C(y) = -\cos y + C, C \in \mathbb{R} \, .$

Поэтому общее решение исходного уравнения будет иметь вид:

$x(y) = C(y) \sin y = (-\cos y + C) \sin y \, , C \in \mathbb{R}$

$x(y) = C \sin y - \sin y \cos y \, , \ C \in \mathbb{R}.$

Ответ: $x(y) = C \sin y - \sin y \cos y \, , \ C \in \mathbb{R}.$

V. Дифференциальные уравнения с однородными коэффициентами

Рассмотрим уравнения вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные относительно x и y функции. Эти уравнения можно решать с помощью подстановки $y(x) = xu(x)$.

Задача 1. Решить уравнение $yy' = 2y - x$.

Сделаем подстановку $y(x) = xu(x)$. Тогда $y' = u(x) + xu'(x)$, и мы получаем дифференциальное уравнение относительно функции $u(x)$:

$xu(u + xu') = 2xu - x \Rightarrow u^2 + xuu' = 2u - 1 \Rightarrow$

$xuu' = -u^2 + 2u - 1$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$.

$-xuu' = (u-1)^2$

$\frac{u}{(u-1)^2} du = -\frac{dx}{x}$ (потеряно решение $u(x) \equiv 1$).

Проинтегрируем это уравнение

$\int \frac{u}{(u-1)^2} du = -\int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{u-1+1}{(u-1)^2} du = -\int \frac{dx}{x}$

$\int \left(\frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}\right) d(u-1) = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln|u-1| - \frac{1}{u-1} = -\ln|x| + C, \ C \in \mathbb{R}.$

Как уже отмечалось ранее, ответ к задаче уже почти получен (за исключением перехода от $u(x)$ к $y(x)$). Но хорошо бы привыкать записывать его в максимально «красивом», то есть удобном для анализа, виде. Поэтому преобразуем уравнение к виду

$\ln|u-1| + \ln|x| = \frac{1}{u-1} + C, \ C \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln|(u-1)x| = \frac{1}{u-1} + C, \ C \in \mathbb{R}.$

Сделаем обратную подстановку

$\ln\left|\left(\frac{y}{x} - 1\right)x\right| = \frac{1}{\frac{y}{x} - 1} + C, \ C \in \mathbb{R}$

$\ln|y - x| = \frac{x}{y-1} + C, \ C \in \mathbb{R}.$

Пропотенцируем это уравнение, получим

$|y - x| = e^{\frac{x}{y-1}} \cdot e^C, \ C \in \mathbb{R}$

$y - x = \pm Ce^{\frac{x}{y-1}}, \ C > 0.$ (*)

Заметим, что «потерянное выше» решение $u(x) \equiv 1 \Leftrightarrow y \equiv x \Leftrightarrow$ $y - x \equiv 0$ как раз и получается в решении (*) при $C = 0$. Поэтому общее решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид

$y - x = Ce^{\frac{x}{y-1}}, \ C \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y - x = Ce^{\frac{x}{y-1}},\ C \in \mathbb{R}$.

В очередной раз отмечаем, что зачастую решение $y(x)$ дифференциального уравнения записать в явном виде не удается.

Задача 2. Решить уравнение $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$.

Сделаем подстановку $y(x) = xu(x)$. Тогда $y' = u(x) + xu'(x)$, и мы получаем дифференциальное уравнение относительно функции $u(x)$:

$x^2 + x^2u^2 - 2xxu(u + xu') = 0 \Longrightarrow -u^2 - 2xuu' + 1 = 0 \Longrightarrow$

$2xuu' = 1 - u^2$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$.

$\frac{2udu}{1-u^2} = \frac{dx}{x}$ (потеряны решения $u(x) \equiv \pm 1$).

Проинтегрируем это уравнение

$2\int \frac{u}{1-u^2}du = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{du^2}{1-u^2} = \int \frac{dx}{x}$

$-\int \frac{d(1-u^2)}{1-u^2} = \int \frac{dx}{x}$

$-\ln|1 - u^2| = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Как уже отмечалось ранее, ответ к задаче уже почти получен (за исключением перехода от $u(x)$ к $y(x)$). Запишем его в максимально «красивом», то есть удобном для анализа, виде. Поэтому преобразуем уравнение к виду

$\ln|1 - u^2| + \ln|x| = C,\ C \in \mathbb{R}$

$\ln|1 - u^2| + 2\ln|x| = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\ln|1 - u^2| + \ln|x|^2 = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\ln|(1 - u^2)x^2| = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\ln|x^2 - x^2u^2| = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Сделаем обратную подстановку

$\ln|x^2 - y^2| = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Пропотенцируем это уравнение, получим

$|x^2 - y^2| = |x| \cdot e^C,\ C \in \mathbb{R}$

$y^2 - x^2 = \pm Cx,\ C > 0.$ (*)

Заметим, что «потерянные выше» решения $u(x) \equiv \pm 1 \Leftrightarrow y \equiv \pm x \Leftrightarrow y^2 \equiv x^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2 \equiv 0$ как раз и получаются в решении (*) при $C = 0$. Поэтому общее решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид

$y^2 - x^2 = Cx,\ C \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y^2 - x^2 = Cx,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 3. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$

Сделаем подстановку $y(x) = xu(x)$. Тогда $y' = u(x) + xu'(x)$, и мы получаем дифференциальное уравнение относительно функции $u(x)$:

$u + xu' = u - \frac{1}{u} \Longrightarrow u' = -\frac{1}{xu}$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$.

$udu = -\frac{dx}{x}.$

Проинтегрируем это уравнение

$\int udu = -\int \frac{dx}{x}$

$\frac{1}{2}u^2 = -\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Сделаем обратную подстановку

$\frac{y^2}{x^2} = -\ln x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Ответ: $\frac{y^2}{x^2} = -\ln x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 4. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}.$

Сделаем подстановку $y(x) = xu(x)$. Тогда $y' = u(x) + xu'(x)$, и мы получаем дифференциальное уравнение относительно функции $u(x)$:

$u + xu' = u + \operatorname{tg} u \Longrightarrow u' = \operatorname{tg} u$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$.

$du \cdot \operatorname{ctg} u = dx.$

Проинтегрируем это уравнение

$\int \frac{\cos u du}{\sin u} = \int dx \Longrightarrow \int \frac{d \sin u}{\sin u} = \int dx$

$\ln|\sin u| = x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Пропотенцируем это уравнение, получим

$|\sin u| = e^x e^C,\ C \in \mathbb{R}$

$\sin u = Ce^x, C \in \mathbb{R}.$

Сделаем обратную подстановку

$\sin\frac{y}{x} = Ce^x, C \in \mathbb{R}.$

Ответ: $\sin\frac{y}{x} = Ce^x, C \in \mathbb{R}.$

Задача 5. Решить уравнение $(x+y)dx - (y-x)dy = 0.$

Сделаем подстановку $y(x) = xu(x)$. Тогда $y' = u(x) + xu'(x)$, и мы получаем дифференциальное уравнение относительно функции $u(x)$:

$x + xu - (xu - x)(u + xu') = 0$

$x \equiv 0$ не является решением этого уравнения, поэтому на x уравнение можно поделить:

$1 + u + u - u^2 + x(1-u)u' = 0$

$\frac{du}{dx}(u-1)x = -u^2 + 2u + 1$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$.

$-\frac{(1-u)du}{1+2u-u^2} = \frac{dx}{x}.$

Проинтегрируем это уравнение

$-\int\frac{(1-u)du}{1+2u-u^2} = \int\frac{dx}{x} \Longrightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{d(1+2u-u^2)}{1+2u-u^2} = \int\frac{dx}{x}$

$-\ln|1+2u-u^2| = 2\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\ln|1+2u-u^2| + \ln x^2 = C, C \in \mathbb{R}$

$\ln|(1+2u-u^2)x^2| = C, C \in \mathbb{R}.$

Пропотенцируем это уравнение, получим

$(1+2u-u^2)x^2 = C,\ C \in \mathbb{R}.$

Сделаем обратную подстановку

$x^2 + 2x^2u - x^2u^2 = C, C \in \mathbb{R}$

$x^2 + 2xy - y^2 = C, C \in \mathbb{R}.$

Ответ: $x^2 + 2xy - y^2 = C, C \in \mathbb{R}.$

Задача 6. Решить уравнение $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$

Сделаем подстановку $y(x) = xu(x)$. Тогда $y' = u(x) + xu'(x)$, и мы получаем дифференциальное уравнение относительно функции $u(x)$:

$x^2u + x^2u^2 = (2x^2 + x^2u)(u + xu')$

$x \equiv 0$ не является решением этого уравнения, поэтому на x^2 уравнение можно поделить:

$u + u^2 = 2u + u^2 + (2 + u)xu'$

$-u = (2 + u)xu'$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$.

Проинтегрируем это уравнение

$\int \frac{(2+u)du}{u} = -\int \frac{dx}{x} \Longrightarrow 2\ln|u| + u = -\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\ln|u^2x| = -u + C, C \in \mathbb{R}.$

Сделаем обратную подстановку

$\ln\left|\frac{y^2}{x}\right| = -\frac{y}{x} + C, C \in \mathbb{R}.$

Пропотенцируем это уравнение, получим

$\frac{y^2}{x} = Ce^{-\frac{y}{x}}, C \in \mathbb{R}$

$y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}, C \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}, C \in \mathbb{R}.$

Задача 7. Решить уравнение $xy' + 2\sqrt{xy} = y.$

Сделаем подстановку $y(x) = xu(x)$. Тогда $y' = u(x) + xu'(x)$, и мы получаем дифференциальное уравнение относительно функции $u(x)$:

$x(u + xu') + 2\sqrt{x^2u} = y.$

Так как $\sqrt{x^2} \equiv |x|$, то получим уравнение

$x(u + xu') + 2|x|\sqrt{u} = xu.$

Задача будет решаться по-разному при $x > 0$ и при $x < 0$.

1) При $x > 0$

$xu + x^2u' + 2x\sqrt{u} = xu$

$xu' + 2\sqrt{u} = 0$

$\frac{du}{2\sqrt{u}} = -\frac{dx}{x}$ (потеряно решение $u \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение

$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \sqrt{u} = -\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Сделаем обратную подстановку

$\sqrt{\frac{y}{x}} = -\ln x + C,\ C \in \mathbb{R}.$

2) При $x < 0$

$xu + x^2u' - 2x\sqrt{u} = xu$

$xu' - 2\sqrt{u} = 0$

$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$ (потеряно решение $u \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение

$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \sqrt{u} = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Сделаем обратную подстановку

$\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln(-x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Заметим, что решение $y \equiv 0$ не входит в полученные семейства решений.

Ответ: $y \equiv 0$,

$\sqrt{\frac{y}{x}} = -\ln x + C,\ C \in \mathbb{R}$ при $x > 0$,

$\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln(-x) + C,\ C \in \mathbb{R}$ при $x < 0$.

VI. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнения вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

где левая часть уравнения является полным дифференциалом du некоторой функции $u(x, y)$, то есть

$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$

Тогда $du(x,y) = 0 \Longrightarrow u(x,y) \equiv C,\ C \in \mathbb{R}.$

Задача 1. Решить уравнение $\underbrace{(x+y+1)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(x-y^2+3)}_{N(x,y)}dy = 0.$

Проверим, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то есть, что $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$. Действительно,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1.$$

Так как $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y$, то

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx + \varphi(y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = \int (x+y+1)dx + \varphi(y) =$$
$$= \frac{x^2}{2} + xy + x + \varphi(y).$$

Но $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$, поэтому получаем

$$x + \varphi'(y) = x - y^2 + 3$$

$$\varphi'(y) = -y^2 + 3 \Longrightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Но у нас $u(x,y) \equiv C_1, C_1 \in \mathbb{R}$, поэтому

$$\frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C = C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$3x^2 + 6xy + 6x + 18y - 2y^3 = C, C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $3x^2 + 6xy + 6x + 18y - 2y^3 = C, C \in \mathbb{R}.$

Замечание. Иногда студенты забывают о том, что функция $u(x,y)$ является вспомогательной, ее нет в условии задачи. А поэтому ее не может быть и в ответе.

Задача 2. Решить уравнение $\underbrace{3x^2e^y}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(x^3e^y - 1)}_{N(x,y)}dy = 0.$

Проверим, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то есть, что $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$. Действительно,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3x^2 e^y$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3x^2 e^y.$$

Так как $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x, y$, то

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int M(x,y) dx + \varphi(y) = \int 3x^2 e^y dx + \varphi(y) =$$
$$= x^3 e^y + \varphi(y).$$

Но $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$, поэтому получаем

$$x^3 e^y + \varphi'(y) = x^3 e^y - 1$$

$$\varphi'(y) = -1 \Rightarrow \varphi(y) = -y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$u(x,y) = x^3 e^y - y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Но у нас $u(x,y) \equiv C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, поэтому

$$x^3 e^y - y + C = C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$x^3 e^y - y = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ответ: $x^3 e^y - y = C, C \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Решить уравнение $\underbrace{e^{-y}}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(1 - xe^{-y})}_{N(x,y)} dy = 0$.

Проверим, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то есть, что $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$. Действительно,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -e^{-y}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -e^{-y}.$$

Так как $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, то

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int M(x,y) dx + \varphi(y) = \int e^{-y} dx + \varphi(y) =$$
$$= xe^{-y} + \varphi(y).$$

Но $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$, поэтому получаем

$-xe^{-y} + \varphi'(y) = 1 - xe^{-y}$

$\varphi'(y) = 1 \implies \varphi(y) = y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Следовательно,

$u(x, y) = xe^{-y} + y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Но у нас $u(x, y) \equiv C_1, C_1\ C \in \mathbb{R}$, поэтому

$xe^{-y} + y + C = C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}$

$xe^{-y} + y = C, \quad C \in \mathbb{R}$

Ответ: $xe^{-y} + y = C, C \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Решить уравнение $\underbrace{2x\cos^2 y}_{M(x,y)}\, dx + \underbrace{(2y - x^2 \sin 2y)}_{N(x,y)}\, dy = 0.$

Проверим, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то есть, что $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$. Действительно,

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x \cdot 2\cos y\,(-\sin y) = -2x \sin 2y$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2x \sin 2y.$

Так как $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x, y$, то

$u(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y) = \int 2x\cos^2 y\, dx + \varphi(y) =$
$= x^2 \cos^2 y + \varphi(y).$

Но $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$, поэтому получаем

$x^2 \cdot 2\cos y\,(-\sin y) + \varphi'(y) = 2y - x^2 \sin 2y$

$\varphi'(y) = 2y \implies \varphi(y) = y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Следовательно,

$u(x, y) = x^2 \cos^2 y + y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Но у нас $u(x, y) \equiv C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$, поэтому

$x^2 \cos^2 y + y^2 + C = C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}$

$x^2 \cos^2 y + y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$

Ответ: $x^2 \cos^2 y + y^2 = C, C \in \mathbb{R}$.