МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ
МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ,

ЧАСТЬ 4

А.И.КОЗКО.Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ,

2024

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам второго курса химического факультета

Неоднородные уравнения n-го порядка с правой частью специального вида

В предыдущем параграфе были решены неоднородные уравнения порядка ≥ 2 с помощью вариации постоянных, и было показано, что осуществление этого метода очень не просто. В некоторых ситуациях, когда правая часть является функцией специального вида, проходят более простые (в смысле вычислений) методы.

Итак, рассмотрим уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.1. Пусть правая часть этого уравнения $f(x) = P_m(x)$ – многочлен степени m и $\lambda = 0$ не является корнем характеристического многочлена, тогда $y_ч(x) = Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ – многочлен степени m.

Теорема 4.2. Пусть правая часть уравнения $f(x) = P_m(x)$ – многочлен степени m и $\lambda = 0$ является корнем кратности s характеристического многочлена, тогда $y_ч(x) = x^s Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ – многочлен степени m.

Задача 1. Решить уравнение $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2 + i,\ \lambda_2 = -2 - i.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{общ.одн.}(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\lambda = 0$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде многочлена 2-й степени:

$y_ч(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$

$y_ч' = 2ax + b$

$y_ч'' = 2a.$

Подставим это в исходное уравнение, получим:

$2a + 4(2ax + b\ ) + 5(ax^2 + bx + c\ ) \equiv 5x^2 - 32x + 5 \Leftrightarrow$

$5ax^2 + (8a + 5b)x + 2a + 4b + 5c \equiv 5x^2 - 32x + 5.$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} 5a & = 5 \\ 8a + 5b & = -32 \\ 2a + 4b + 5c & = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 5b = -40 \\ 4b + 5c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 7\,. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид: $y_{\text{ч}}(x) = x^2 - 8x + 7$, а общее решение уравнения $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$ запишется в виде

$$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}}(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7,$$
$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 2. Решить уравнение $y^{IV} - 2y'' + y = x^2 + 1$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y^{IV} - 2y'' + y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)^2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = \lambda_4 = -1.$$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x},\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

2) Так как $\lambda = 0$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде многочлена 2-й степени:

$$y_{\text{ч}}(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$y_{\text{ч}}' = 2ax + b$$

$$y_{\text{ч}}'' = 2a$$

$$y_{\text{ч}}''' \equiv y_{\text{ч}}^{IV} \equiv 0.$$

Подставим это в исходное уравнение, получим:

$$0 - 2 \cdot 2a + ax^2 + bx + c \equiv x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$ax^2 + bx + c - 4a \equiv x^2 + 1.$$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c - 4a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 5. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид: $y_ч(x) = x^2 + 5$, а общее решение уравнения $y^{IV} - 2y'' + y = x^2 + 1$ запишется в виде

$$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_ч(x) = \\ = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + x^2 + 5,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + x^2 + 5,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Решить уравнение $y'' + 3y' = 9x$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 3y' = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3.$$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_{общ.одн.}(x) = C_1 + C_2e^{-3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Так как $\lambda = 0$ является корнем кратности один характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y_ч(x) = x^1(ax + b) = ax^2 + bx,\ a, b \in \mathbb{R}$$

$$y_ч' = 2ax + b$$

$$y_ч'' = 2a.$$

Подставим это в исходное уравнение $y'' + 3y' = 9x$, получим:

$$2a + 3(2ax + b\ ) \equiv 9x \Leftrightarrow$$

$$6ax + 2a + 3b \equiv 9x.$$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} 6a = 9 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -1. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x) = x\left(\frac{3}{2}x - 1\right) = \frac{3}{2}x^2 - x$, а общее решение уравнения

$y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$ запишется в виде

$$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_ч(x) = C_1 + C_2e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Решить уравнение $y'' - 2y' = x^2 - x$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 2y' = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$.

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 + C_2 e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2) Так как $\lambda = 0$ является корнем кратности один характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = x^1(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx,\ a, b, c \in \mathbb{R}$

$y_{\text{ч}}' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y_{\text{ч}}'' = 6ax + 2b$.

Подставим это в исходное уравнение $y'' - 2y' = x^2 - x$, получим:

$6ax + 2b - 2(3ax^2 + 2bx + c) \equiv x^2 - x \Leftrightarrow$

$-6ax^2 + (6a - 4b)x + 2b - 2c \equiv x^2 - x$.

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} -6a = 1 \\ 6a - 4b = -1 \\ 2b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{\text{ч}}(x) = x\left(-\frac{1}{6}x^2\right) = -\frac{x^3}{6}$, а общее решение уравнения

$y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$ запишется в виде

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}}(x) = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x^3}{6},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x^3}{6},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 5. Решить уравнение $y''' - 2y'' - 3y' = x + 1$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 3.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\lambda = 0$ является корнем кратности один характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = x^1(ax + b) = ax^2 + bx,\ a, b \in \mathbb{R}$

$y_{\text{ч}}' = 2ax + b$

$y_{\text{ч}}'' = 2a$

$y_{\text{ч}}''' = 0.$

Подставим это в исходное уравнение $y''' - 2y'' - 3y' = x + 1$, получим:

$0 - 2 \cdot 2a - 3(2ax + b) \equiv x + 1 \Leftrightarrow$

$-6ax - 4a - 3b \equiv x + 1.$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} -6a = 1 \\ -4a - 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = -\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{\text{ч}}(x) = x\left(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}$, а общее решение исходного уравнения $y''' - 2y'' - 3y' = x + 1$ запишется в виде

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}}(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Задача 6. Решить уравнение $y''' + y'' - 2y' = 2 - x.$

1) Рассмотрим однородное уравнение $y''' + y'' - 2y' = 0.$

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -2.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\lambda = 0$ является корнем кратности один характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = x^1(ax + b) = ax^2 + bx,\ a, b \in \mathbb{R}$

$y_{\text{ч}}' = 2ax + b$

$y_{\text{ч}}'' = 2a$

$y_{\text{ч}}''' = 0.$

Подставим это в исходное уравнение $y''' + y'' - 2y' = 2 - x$, получим:

$0 + 2a - 2(2ax + b) \equiv 2 - x \Leftrightarrow$

$-4ax + 2a - 2b \equiv -x + 2.$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} -4a = -1 \\ 2a - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{\text{ч}}(x) = x\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4}$, а общее решение исходного уравнения $y''' - 2y'' - 3y' = x + 1$ запишется в виде

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}}(x) = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Задача 7. Решить уравнение $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 6(1 + 5x)$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2 + i,\ \lambda_4 = 2 - i.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{2x}\cos x + C_4e^{2x}\sin x\,,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\lambda = 0$ является корнем кратности два характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$y_ч(x) = x^2(ax + b) = ax^3 + bx^2,\ a, b \in \mathbb{R}$

$y_ч' = 3ax^2 + 2bx$

$y_ч'' = 6ax + 2b$

$y_ч''' = 6a$

$y_ч^{IV} = 0.$

Подставим это в исходное уравнение $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 6(1 + 5x)$, получим:

$0 - 4 \cdot 6a + 5(6ax + 2b) \equiv 6 + 30x \Leftrightarrow$

$30ax - 24a + 10b \equiv 30x + 6.$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} 30a = 30 \\ -24a + 10b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x) = x^2(x - 3) = x^3 + 3x^2$, а общее решение исходного уравнения $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 6(1 + 5x)$ запишется в виде

$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_ч(x) =$

$= C_1 + C_2x + C_3e^{2x}\cos x + C_4e^{2x}\sin x + x^3 + 3x^2,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{2x}\cos x + C_4e^{2x}\sin x + x^3 + 3x^2$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

Задача 8. Решить уравнение $y'' - 4y = 8x^3$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 4y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{общ.одн.}(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\lambda = 0$ не является корнем характеристического

многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$y_ч(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$y'_ч = 3ax^2 + 2bx + c$

$y''_ч = 6ax + 2b.$

Подставим это в исходное уравнение $y'' - 4y = 8x^3$, получим:

$6ax + 2b - 4(ax^3 + bx^2 + cx + d) \equiv 8x^3 \Leftrightarrow$

$6ax + 2b - 4ax^3 - 4bx^2 - 4cx - 4d \equiv 8x^3.$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} -4a = 8 \\ -4b = 0 \\ 6a - 4c = 0 \\ 2b - 4d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 0. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x) = -2x^3 - 3x$, а общее решение исходного уравнения

$y'' - 4y = 8x^3$ запишется в виде

$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_ч(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^3 - 3x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^3 - 3x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Рассмотрим уравнение вида

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x),$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ с другой правой частью.

Теорема 4.3. Пусть правая часть уравнения $f(x) = e^{\alpha x}P_m(x), \alpha \in \mathbb{R}$, $P_m(x)$ – многочлен степени m, и α не является корнем характеристического многочлена, тогда $y_ч(x) = e^{\alpha x}Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ – многочлен степени m.

Теорема 4.4. Пусть правая часть уравнения $f(x) = e^{\alpha x}P_m(x),\ \alpha \in \mathbb{R}$, $P_m(x)$ – многочлен степени m, и α является корнем кратности s характеристического многочлена, тогда $y_ч(x) = e^{\alpha x}x^sQ_m(x)$, где $Q_m(x)$ – многочлен степени m.

Задача 9. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2) Так как $\alpha = 2$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = ae^{2x},\ a \in \mathbb{R}$

$y'_{\text{ч}} = 2ae^{2x}$

$y''_{\text{ч}} = 4ae^{2x}$.

Подставим это в исходное уравнение $y'' + 2y' + y = e^{2x}$, получим:

$4ae^{2x} + 2 \cdot 2ae^{2x} + ae^{2x} \equiv e^{2x} \Leftrightarrow$

$9a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{9}$.

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{\text{ч}}(x) = \frac{1}{9} e^{2x}$, а общее решение исходного уравнения $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ запишется в виде

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 10. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2) Так как $\alpha = 2$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = ae^{2x},\ a \in \mathbb{R}$

$y_ч' = 2ae^{2x}$

$y_ч'' = 4ae^{2x}$.

Подставим это в исходное уравнение $y'' + 2y' + y = e^{2x}$, получим:

$4ae^{2x} + 2 \cdot 2ae^{2x} + ae^{2x} \equiv e^{2x} \Leftrightarrow$

$9a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{9}$.

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x) = \frac{1}{9}e^{2x}$, а общее решение исходного уравнения $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ запишется в виде

$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_ч(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 11. Решить уравнение $y'' - 7y' + 12y = -e^{3x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 7y' + 12y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 4$.

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{общ.одн.}(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{4x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2) Так как $\alpha = 3$ является корнем кратности 1 характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$y_ч(x) = ax^1e^{3x},\ a \in \mathbb{R}$

$y_ч' = ae^{3x} + 3axe^{3x}$

$y_ч'' = 6ae^{3x} + 9axe^{3x}$.

Подставим это в исходное уравнение $y'' - 7y' + 12y = -e^{3x}$, получим:

$6ae^{3x} + 9axe^{3x} - 7(ae^{3x} + 3axe^{3x}) + 12 \cdot axe^{3x} \equiv -e^{3x} \Leftrightarrow$

$-a + 0 \cdot ax \equiv -1 \Leftrightarrow$

$-a = -1 \Leftrightarrow a = 1$.

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x) = xe^{3x}$, а общее решение исходного уравнения $y'' - 7y' + 12y = -e^{3x}$ запишется в виде

$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_ч(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{4x} + xe^{3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $y(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{4x} + xe^{3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 12. Решить уравнение $y''' + 8y = e^{-2x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y''' + 8y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$
$\Leftrightarrow\ \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}i, \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$.

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{общ.одн.}(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x\cos\sqrt{3}x + C_3e^x\sin\sqrt{3}x,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

2) Так как $\alpha = -2$ является корнем кратности 1 характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$y_ч(x) = axe^{-2x},\ a \in \mathbb{R}$.

Далее можно сразу воспользоваться формулой Лейбница

$y_ч''' = a(x \cdot (-2)^3e^{-2x} + 1 \cdot 3 \cdot (-2)^2e^{-2x}) = -8axe^{-2x} + 12ae^{-2x}$.

Подставим это в исходное уравнение $y''' + 8y = e^{-2x}$, получим:

$-8axe^{-2x} + 12ae^{-2x} + 8 \cdot axe^{-2x} \equiv e^{-2x} \Leftrightarrow$

$12a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{12}$.

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x) = \frac{1}{12}xe^{-2x}$, а общее решение исходного уравнения

$y''' + 8y = e^{-2x}$ запишется в виде

$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_ч(x) =$

$= C_1e^{-2x} + C_2e^x\cos\sqrt{3}x + C_3e^x\sin\sqrt{3}x + \frac{1}{12}xe^{-2x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x\cos\sqrt{3}x + C_3e^x\sin\sqrt{3}x + \frac{1}{12}xe^{-2x}$,
$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Задача 13. Решить уравнение $y''' - 2y'' = e^{2x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y''' - 2y'' = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = 2$ является корнем кратности 1 характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y''' - 2y'' = e^{2x}$ будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = axe^{2x},\ a \in \mathbb{R}.$

Далее можно сразу воспользоваться формулой Лейбница

$y_{\text{ч}}'' = 2 \cdot a \cdot 2e^{2x} + ax \cdot 2^2 \cdot e^{2x} = 4ae^{2x} + 4axe^{2x}$

$y_{\text{ч}}''' = 12ae^{2x} + 8axe^{2x}..$

Подставим это в исходное уравнение $y''' + 8y = e^{-2x}$, получим:

$12ae^{2x} + 8axe^{2x} - 2(4ae^{2x} + 4axe^{2x}) \equiv e^{2x} \Leftrightarrow$

$4a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{\text{ч}}(x) = \frac{1}{4}xe^{2x}$, а общее решение исходного уравнения

$y''' - 2y'' = e^{2x}$ запишется в виде

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}}(x) =$

$= C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Задача 14. Решить уравнение $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = e^{-2x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$

(как всегда, один корень находим подбором среди делителей свободного члена многочлена, делим «столбиком» и находим корни полученного квадратного трехчлена…)

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{-2x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = -2$ является корнем кратности 1 характеристического

многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = e^{-2x}$ будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = axe^{-2x},\ a \in \mathbb{R}$

$y_{\text{ч}}' = ae^{-2x} - 2axe^{-2x}$

$y_{\text{ч}}'' = -2ae^{-2x} - 2ae^{-2x} + 4axe^{-2x} = -4ae^{-2x} + 4axe^{-2x}$

$y_{\text{ч}}''' = 8ae^{-2x} + 4ae^{-2x} - 8axe^{-2x} = 12ae^{-2x} - 8axe^{-2x}..$

Подставим это в исходное уравнение $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = e^{-2x}$, получим:

$12ae^{-2x} - 8axe^{-2x} + 4(-4ae^{-2x} + 4axe^{-2x}) + 5(ae^{-2x} - 2axe^{-2x}) +$
$+2(axe^{-2x}) \equiv e^{-2x} \Leftrightarrow$

$12a - 8ax - 16a + 16ax + 5a - 10ax + 2ax \equiv 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 1.$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{\text{ч}}(x) = xe^{2x}$, а общее решение исходного уравнения

$y''' + 4y'' + 5y' + 2y = e^{-2x}$ запишется в виде

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}}(x) =$

$= C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{-2x} + xe^{-2x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{-2x} + xe^{-2x}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Задача 15. Решить уравнение $y'' - 2y = xe^{-x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 2y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2}.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = -1$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y'' - 2y = xe^{-x}$ будем искать в виде:

$y_{ч}(x) = (ax + b)e^{-x},\ a, b \in \mathbb{R}$

$y_{ч}' = ae^{-x} - axe^{-x} - be^{-x}$

$y_{ч}'' = -ae^{-x} - ae^{-x} + axe^{-x} + be^{-x} = -2ae^{-x} + axe^{-x} + be^{-x}.$

Подставим это в исходное уравнение $y'' - 2y = xe^{-x}$, получим:

$-2ae^{-x} + axe^{-x} + be^{-x} - 2(ax + b)e^{-x} \equiv e^{-x} \Leftrightarrow$

$ax + b - 2a - 2ax - 2b \equiv x \Leftrightarrow$

$-ax - 2a - b \equiv x.$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} -a = 1 \\ -2a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{ч}(x) = (-x + 2)e^{-x}$, а общее решение исходного уравнения $y'' - 2y = xe^{-x}$ запишется в виде

$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_{ч}(x) = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} + (2 - x)e^{-x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} + (2 - x)e^{-x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 16. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = (1 + x)e^{2x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{общ.одн.}(x) = C_1e^{x} + C_2e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = 2$ является корнем кратности 1 характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = (1 + x)e^{2x}$ будем искать в виде:

$y_{ч}(x) = x(ax + b)e^{2x} = (ax^2 + bx)e^{2x},\ a, b \in \mathbb{R}$

$y_ч' = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx)e^{2x} = (2ax^2 + 2ax + 2bx + b)e^{2x}$

$y_ч'' = (4ax + 2a + 2b)e^{2x} + (4ax^2 + 4ax + 4bx + 2b)e^{2x} =$
$= (4ax^2 + 8ax + 4bx + 2a + 4b)e^{2x}$.

Подставим это в исходное уравнение $y'' - 3y' + 2y = (1 + x)e^{2x}$, получим:

$(4ax^2 + 8ax + 4bx + 2a + 4b)e^{2x} - 3(2ax^2 + 2ax + 2bx + b)e^{2x} +$
$+2(ax^2 + bx)e^{2x} \equiv (1 + x)e^{2x} \Leftrightarrow$

$4ax^2 + 8ax + 4bx + 2a + 4b - 6ax^2 - 6ax - 6bx - 3b + 2ax^2 + 2bx \equiv$
$\equiv 1 + x \Leftrightarrow$

$2ax + 2a + b \equiv x + 1$.

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$, а общее решение исходного уравнения

$y'' - 3y' + 2y = (1 + x)e^{2x}$ запишется в виде

$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_ч(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ответ: $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 17. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{общ.одн.}(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2) Так как $\alpha = -1$ является корнем кратности 2 характеристического

многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения
$y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$ будем искать в виде:

$y_ч(x) = x^2(ax^2 + bx + c)e^{-x} = (ax^4 + bx^3 + cx^2)e^{-x},\ a, b, c \in \mathbb{R}$

$y'_ч = (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx)e^{-x} + (-ax^4 - bx^3 - cx^2)e^{-x} =$
$= (-ax^4 + ax^3 - bx^3 - cx^2 + 3bx^2 + 2cx)e^{-x}$

$y''_ч = (12ax^2 + 6bx + 2c - 8ax^3 - 6bx^2 - 4cx + ax^4 + bx^3 + cx^2)e^{-x} =$
$= (ax^4 + bx^3 - 8ax^3 + 12ax^2 - 6bx^2 + cx^2 + 6bx - 4cx + 2c)e^{-x}.$

Подставим это в исходное уравнение $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$, получим:

$(ax^4 + bx^3 - 8ax^3 + 12ax^2 - 6bx^2 + cx^2 + 6bx - 4cx + 2c)e^{-x} +$
$+2(-ax^4 + ax^3 - bx^3 - cx^2 + 3bx^2 + 2cx)e^{-x} + (ax^4 + bx^3 + cx^2)e^{-x} \equiv$
$\equiv x^2e^{-x} \Leftrightarrow$

$12ax^2 + 6bx + 2c \equiv x^2.$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} 12a = 1 \\ 6b = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{12} \\ b = 0 \\ c = 0\,. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x) = \frac{1}{12}x^4e^{-x}$, а общее решение исходного уравнения

$y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$ запишется в виде

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_ч(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{12}x^4e^{-x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{12}x^4e^{-x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Теорема 4.5. Пусть правая часть уравнения

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x),$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$,

$f(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P_k(x), P_m(x)$ – многочлены степени k и m соответственно, и $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического многочлена, тогда $y_ч(x) = e^{\alpha x}\big(Q_p(x)\cos\beta x + R_p(x)\sin\beta x\big)$, где $Q_p(x)$, $R_p(x)$ – многочлены степени $p = max\{k, m\}$.

Теорема 4.6. Пусть правая часть уравнения

$f(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P_k(x), P_m(x)$ – многочлены степени k и m соответственно, и $\alpha \pm \beta i$ являются корнями кратности s характеристического многочлена, тогда

$y_ч(x) = x^s e^{\alpha x}\big(Q_p(x)\cos\beta x + R_p(x)\sin\beta x\big)$, где $Q_p(x), R_p(x)$ – многочлены степени $p = max\{k, m\}$.

Задача 18. Решить уравнение $y'' - 2y' + 5y = 4\cos x + 2\sin x$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 + 2i,\ \lambda_2 = 1 - 2i.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{общ.одн.}(x) = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = \pm i$ не являются корнями характеристического

многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y'' - 2y' + 5y = 4\cos x + 2\sin x$ будем искать в виде:

$y_ч(x) = a\cos x + b\sin x,\ a, b \in \mathbb{R}$

$y_ч' = -a\sin x + b\cos x$

$y_ч'' = -a\cos x - b\sin x.$

Подставим это в исходное уравнение $y'' - 2y' + 5y = 4\cos x + 2\sin x$, получим:

$-a\cos x - b\sin x - 2(-a\sin x + b\cos x) + 5(a\cos x + b\sin x) \equiv$
$\equiv 4\cos x + 2\sin x \Leftrightarrow$

$4a\cos x - 2b\cos x + 2a\sin x + 4b\sin x \equiv 4\cos x + 2\sin x.$

Напомним **теорему**: $P_k(x)\cos x + P_m(x)\sin x \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_k(x) \equiv 0 \\ P_m(x) \equiv 0. \end{cases}$

Поэтому получим систему

$\begin{cases} 4a - 2b = 4 \\ 2a + 4b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases}$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x) = \cos x$, а общее решение исходного уравнения

$y'' - 2y' + 5y = 4\cos x + 2\sin x$ запишется в виде

$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_ч(x) = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \cos x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \cos x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 19. Решить уравнение $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,\ \lambda_3 = 2i,\ \lambda_4 = -2i.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x\ ,\ \ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = \pm i$ являются корнями кратности 1 характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x$ будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = x(a\cos x + b\sin x),\ \ a, b \in \mathbb{R}$

$y''_{\text{ч}} = 2(-a\sin x + b\cos x) + x(-a\cos x - b\sin x)$

$y^{IV}_{\text{ч}} = 4(a\sin x - b\cos x) + x(a\cos x + b\sin x).$

Напомним использованную нами **теорему (формула Лейбница)**:

$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)} v^{(n-k)}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $u(x), v(x) \in C^n(\mathbb{R})$.

Подставим это в исходное уравнение $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x$, получим:

$4(a\sin x - b\cos x) + x(a\cos x + b\sin x) +$
$+5\big(2(-a\sin x + b\cos x) + x(-a\cos x - b\sin x)\big) + 4x(a\cos x + b\sin x) \equiv$
$\equiv 3\sin x \Leftrightarrow$

$-6a\sin x + 6b\cos x \equiv 3\sin x.$

$$P_k(x)\cos x + P_m(x)\sin x \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_k(x) \equiv 0 \\ P_m(x) \equiv 0. \end{cases}$$

Поэтому получим систему

$$\begin{cases} -6a = 3 \\ \ \ 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{\text{ч}}(x) = x\left(-\frac{1}{2}\cos x\right) = -\frac{x}{2}\cos x$, а общее решение исходного уравнения $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x$ запишется в виде

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}}(x) =$
$= C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x - \frac{x}{2}\cos x\ ,\ \ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \frac{x}{2} \cos x$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Задача 20. Решить уравнение $y''' - y'' + y' - y = 2\cos x$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y''' - y'' + y' - y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1) + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$ $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,\ \lambda_3 = 1.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^x,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = \pm i$ являются корнями кратности 1 характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y''' - y'' + y' - y = 2\cos x$ будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = x(a\cos x + b\sin x),\ a, b \in \mathbb{R}$

$y_{\text{ч}}' = (a\cos x + b\sin x) + x(-a\sin x + b\cos x)$

$y_{\text{ч}}'' = 2(-a\sin x + b\cos x) + x(-a\cos x - b\sin x)$

$y_{\text{ч}}''' = 3(-a\cos x - b\sin x) + x(a\sin x - b\cos x).$

Здесь мы вновь использовали формулу Лейбница.

Подставим это в исходное уравнение $y''' - y'' + y' - y = 2\cos x$, получим:

$-3a\cos x - 3b\sin x + ax\sin x - bx\cos x + 2a\sin x - 2b\cos x +$
$+ax\cos x + bx\sin x + a\cos x + b\sin x + -ax\sin x + bx\cos x -$
$-ax\cos x - bx\sin x \equiv 2\cos x \Leftrightarrow$

$-2a\cos x - 2b\sin x + 2a\sin x - 2b\cos x \equiv 2\cos x.$

$$P_k(x)\cos x + P_m(x)\sin x \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_k(x) \equiv 0 \\ P_m(x) \equiv 0. \end{cases}$$

Поэтому получим систему

$$\begin{cases} -2a - 2b = 2 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x) = x\left(-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = -\frac{x}{2}(\cos x + \sin x)$, а общее решение исходного уравнения $y''' - y'' + y' - y = 2\cos x$ запишется в виде

$$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_ч(x) =$$
$$= C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^x - \frac{x}{2}(\cos x + \sin x),\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^x - \frac{x}{2}(\cos x + \sin x),\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Задача 21. Решить уравнение $y'' + 4y = 2\cos 2x - 8x\sin 2x$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 4y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = \pm 2i$ являются корнями кратности 1 характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y'' + 4y = 2\cos 2x - 8x\sin 2x$ будем искать в виде:

$$y_ч(x) = x\big((ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x\big) =$$
$$= (ax^2+bx)\cos 2x + (cx^2+dx)\sin 2x\,,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$y_ч'' = 2a\cos 2x + 2c\sin 2x + 2(2ax+b)(-2\sin 2x) + 2(2cx+d)(2\cos 2x) +$$
$$+(ax^2+bx)(-4\cos 2x) + (cx^2+dx)(-4\sin 2x).$$

Здесь мы вновь использовали формулу Лейбница.

Подставим это в исходное уравнение $y'' + 4y = 2\cos 2x - 8x\sin 2x$, получим:

$$2a\cos 2x + 2c\sin 2x - 8ax\sin 2x - 4b\sin 2x + 8cx\cos 2x + 4d\cos 2x -$$
$$-4ax^2\cos 2x - 4bx\cos 2x - 4cx^2\sin 2x - 4dx\sin 2x +$$
$$+4ax^2\cos 2x + 4bx\cos 2x + 4cx^2\sin 2x + 4dx\sin 2x \equiv$$
$$\equiv 2\cos 2x - 8x\sin 2x \Leftrightarrow$$

$$(8cx + 2a + 4d)\cos 2x + (-8ax + 2c - 4b)\sin 2x \equiv 2\cos 2x - 8x\sin 2x.$$

$$P_k(x)\cos px + P_m(x)\sin px \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_k(x) \equiv 0 \\ P_m(x) \equiv 0. \end{cases}$$

Поэтому получим систему

$$\begin{cases} 8cx + 2a + 4d \equiv 2 \\ -8ax + 2c - 4b \equiv -8x. \end{cases}$$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} 2a + 4d = 2 \\ 8c = 0 \\ 2c - 4b = 0 \\ -8a = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_{\text{ч}}(x) = x^2 \cos 2x$, а общее решение исходного уравнения

$y'' + 4y = 2\cos 2x - 8x \sin 2x$ запишется в виде

$$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}}(x) =$$
$$= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x^2 \cos 2x\,,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x^2 \cos 2x\,,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 22. Решить уравнение $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 4y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha = 2 \pm 2i$ не является корнем характеристического

многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$ будем искать в виде:

$y_{\text{ч}}(x) = (a \cos 2x + b \sin 2x) e^{2x},\ \ a, b \in \mathbb{R}$

$$y_{\text{ч}}'' = 4e^{2x}(a \cos 2x + b \sin 2x) + 2 \cdot 2e^{2x}(-2a \sin 2x + 2b \cos 2x) +$$
$$+ e^{2x}(-4a \cos 2x += -4b \sin 2x).$$

Здесь мы вновь использовали формулу Лейбница.

Подставим это в исходное уравнение $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$, получим:

$$e^{2x}(4a \cos 2x + 4b \sin 2x - 8a \sin 2x + 8b \cos 2x - 4a \cos 2x - 4b \sin 2x) -$$
$$- e^{2x}(4a \cos 2x + 4b \sin 2x) \equiv e^{2x} \sin 2x \Leftrightarrow$$

$$-8a \sin 2x + 8b \cos 2x - 4a \cos 2x - 4b \sin 2x \equiv \sin 2x.$$

$$P_k(x) \cos px + P_m(x) \sin px \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_k(x) \equiv 0 \\ P_m(x) \equiv 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases}-8a-4b=1\\-4a+8b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-20b=1\\ a=2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{10}\\ b=-\frac{1}{20}.\end{cases}$$

Следовательно, частное решение будет иметь вид:

$y_ч(x)=\left(-\frac{1}{10}\cos 2x-\frac{1}{20}\sin 2x\right)e^{2x}$, а общее решение исходного уравнения

$y''-4y=e^{2x}\sin 2x$ запишется в виде

$$y(x)=y_{\text{общ.одн.}}(x)+y_ч(x)=$$
$$=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\left(-\frac{1}{10}\cos 2x-\frac{1}{20}\sin 2x\right)e^{2x},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\left(-\frac{1}{10}\cos 2x-\frac{1}{20}\sin 2x\right)e^{2x},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$

Задача 23. Решить уравнение $y''-2y'+2y=4e^x\sin x$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y''-2y'+2y=0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2-2\lambda+2=0 \Leftrightarrow\ \lambda_1=1+i,\lambda_2=1-i.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x)=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x),\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$

2) Так как $\alpha=1\pm i$ является корнем кратности 1 характеристического многочлена, то частное решение исходного неоднородного уравнения $y''-2y'+2y=4e^x\sin x$ будем искать в виде:

$$y_ч(x)=xe^x(a\cos x+b\sin x)=e^x(ax\cos x+bx\sin x),\ a,b\in\mathbb{R}$$

$$y_ч'=e^x(ax\cos x+bx\sin x)+e^x(a\cos x-ax\sin x+b\sin x+bx\cos x)$$

$$y_ч''=(2e^x+xe^x)(a\cos x+b\sin x)+2(e^x+xe^x)(-a\sin x+b\cos x)+$$
$$+xe^x(-a\cos x-b\sin x).$$

Здесь мы вновь использовали формулу Лейбница для нахождения второй производной.

Подставим это в исходное уравнение $y''-2y'+2y=4e^x\sin x$, получим (сразу поделив тождество на e^x):

$$2a\cos x+ax\cos x\ ++2b\sin x+bx\sin x-2a\sin x+2b\cos x-$$
$$-2ax\sin x\ +2bx\cos x-ax\cos x-bx\sin x-$$
$$-2a\cos x+2ax\sin x-2b\sin x-2bx\cos x-2ax\cos x-2b\sin x+$$
$$+2ax\cos x+2bx\sin x\equiv 4\sin x\Leftrightarrow$$

$2b\cos x - 2a\sin x \equiv 4\sin x.$

$$P_k(x)\cos px + P_m(x)\sin px \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_k(x) \equiv 0 \\ P_m(x) \equiv 0. \end{cases}$$

$\begin{cases} -2b = 0 \\ -2a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0. \end{cases}$

Следовательно, частное решение будет иметь вид: $y_{ч}(x) = -2xe^x\cos x$,

а общее решение исходного уравнения $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\sin x$ запишется в виде

$y(x) = y_{общ.одн.}(x) + y_{ч}(x) = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) - 2xe^x\cos x =$
$= e^x(C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Замечание. Если правая часть уравнения $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то $y_{ч}(x) = y_{ч_1}(x) + y_{ч_2}(x)$, где $y_{ч_1}(x)$ и $y_{ч_2}(x)$ – частные решения уравнений $L(y) = f_1(x)$ и $L(y) = f_2(x)$.

Задача 24. Решить уравнение $y'' + y = x + 2e^x$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{общ.одн.}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Найдем частное решение задачи $y'' + y = x$.

Так как $\alpha = 0$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение неоднородного уравнения $y'' + y = x$ будем искать в виде:

$y_{ч_1}(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$

$y''_{ч_1} = 0.$

Подставим это в уравнение $y'' + y = x$ и получим

$0 + ax + b \equiv x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases}$

Следовательно, $y_{ч_1}(x) = x$.

3) Найдем частное решение задачи $y'' + y = 2e^x$.

Так как $\alpha = 1$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение неоднородного уравнения $y'' + y = 2e^x$ будем искать в виде:

$y_{ч_2}(x) = ae^x, \ a \in \mathbb{R}$

$y''_{ч_2} = ae^x.$

Подставим это в уравнение $y'' + y = 2e^x$ и получим

$ae^x + ae^x \equiv 2e^x \Leftrightarrow a = 1.$

Следовательно, $y_{ч_2}(x) = e^x$.

Поэтому общее решение исходного уравнения $y'' + y = x + 2e^x$ запишется в виде:

$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{ч_1}(x) + y_{ч_2}(x) =$
$= C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^x, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^x, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 25. Решить уравнение $y'' + 9y = 2x \sin x + xe^{3x}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 9y = 0$.

Уравнение относительно характеристического многочлена

$\lambda^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i.$

Поэтому общее решение однородного уравнения запишется в виде

$y_{\text{общ.одн.}}(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2) Найдем частное решение задачи $y'' + 9y = 2x \sin x$.

Так как $\alpha = \pm i$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение неоднородного уравнения $y'' + 9y = 2x \sin x$ будем искать в виде:

$y_{ч_1}(x) = (ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x, \ a, b \in \mathbb{R}$

$y''_{ч_1} = 2a \cos x - (ax + b) \sin x + c \sin x - (cx + d) \cos x.$

Подставим это в уравнение $y'' + 9y = 2x \sin x$ и получим

$2a \cos x - ax \sin x - b \sin x - 2c \sin x - cx \cos x - d \cos x + 9ax \sin x +$
$+9b \sin x + 9cx \cos x + 9 \cos x \equiv 2x \sin x \Leftrightarrow$

$$(8cx + 8d + 2a) \cos x + (8ax + 8b - 2c) \sin x \equiv 2x \sin x.$$

$$P_k(x) \cos px + P_m(x) \sin px \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_k(x) \equiv 0 \\ P_m(x) \equiv 0. \end{cases}$$

Поэтому получим систему

$$\begin{cases} 8cx + 8d + 2a \equiv 0 \\ 8ax + 8b - 2c \equiv 2x. \end{cases}$$

Два многочлена тождественно равны $\Leftrightarrow$ у них одновременно равны все соответствующие коэффициенты, поэтому получим систему

$$\begin{cases} 2a + 8d = 0 \\ 8c = 0 \\ 8b - 2c = 0 \\ 8a = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ c = 0 \\ b = 0 \\ d = -\frac{1}{16}. \end{cases}$$

Следовательно, $y_{\text{ч}_1}(x) = \frac{1}{4}x\sin x - \frac{1}{16}\cos x$.

3) Найдем частное решение задачи $y'' + 9y = xe^{3x}$.

Так как $\alpha = 3$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение неоднородного уравнения $y'' + 9y = xe^{3x}$ будем искать в виде:

$y_{\text{ч}_2}(x) = (ax + b)e^{3x}, \ a, b \in \mathbb{R}$

$y''_{\text{ч}_2} = 2 \cdot a \cdot 3e^{3x} + (ax + b) \cdot 9e^{3x}$.

Подставим это в уравнение $y'' + 9y = xe^{3x}$ и получим

$6ae^{3x} + 9be^{3x} + 2 \cdot 9ae^{3x} + 9be^{3x} \equiv xe^{3x} \Leftrightarrow$

$$6a + 18b + 18ax \equiv x \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 8b = 0 \\ 18a = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{18} \\ b = -\frac{1}{54}. \end{cases}$$

Следовательно, $y_{\text{ч}_2}(x) = \left(\frac{1}{18}x - \frac{1}{54}\right)e^{3x}$.

Поэтому общее решение исходного уравнения $y'' + 9y = 2x\sin x + xe^{3x}$ запишется в виде:

$$y(x) = y_{\text{общ.одн.}}(x) + y_{\text{ч}_1}(x) + y_{\text{ч}_2}(x) =$$
$$= C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{4}x\sin x - \frac{1}{16}\cos x + \left(\frac{1}{18}x - \frac{1}{54}\right)e^{3x}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{4}x\sin x - \frac{1}{16}\cos x + \left(\frac{1}{18}x - \frac{1}{54}\right)e^{3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.