МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

А.И. КОЗКО, Л.М. ЛУЖИНА., А.А. ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

УДК 517.3

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам второго курса химического факультета МГУ.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 1-ГО РОДА

Пусть поверхность $S \subset D \subset \mathbb{R}^3$ является гладкой или кусочно-гладкой поверхностью, D – область в $\mathbb{R}^3$, и каждый гладкий кусок поверхности задан как

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \sigma, z = z(x, y) \in C^1(\sigma)\},$$

$f(x, y, z)$ непрерывна в области D, тогда

$$\iint_S f(x, y, z)ds = \iint_\sigma f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}dxdy$$

Задача 1. Найти $\iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right)ds$, где S – часть плоскости $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, лежащая в первом октанте.

Уравнение плоскости можно записать в виде: $z = -2x - \frac{4}{3}y + 4$. Тогда $z'_x = -2$, $z'_y = -\frac{4}{3}$ и $ds = \sqrt{1 + (-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$.

Проекцией σ в этом случае является прямоугольный треугольник с катетами 2 и 3, лежащий в первом квадранте. Поэтому

$$\iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right)ds = \iint_\sigma \left(\left(-2x - \frac{4}{3}y + 4\right) + 2x + \frac{4}{3}y\right)\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy =$$
$$= \frac{\sqrt{61}}{3}\iint_\sigma 4dxdy = \frac{4\sqrt{61}}{3}S(\sigma) = \frac{4\sqrt{61}}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 3\right) = 4\sqrt{61}.$$

Задача 2. Найти $\iint_S xyzds$, где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая в первом октанте.

Уравнение плоскости можно записать в виде: $z = 1 - x - y$. Тогда $z'_x = -1$, $z'_y = -1$ и $ds = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}dxdy = \sqrt{3}dxdy$.

Проекцией σ в этом случае является прямоугольный треугольник с катетами 1 и 1, лежащий в первом квадранте. Поэтому

$$\iint_S xyzds = \iint_\sigma xy(1 - x - y)\sqrt{3}dxdy =$$
$$= \int_0^1 xdx \int_0^{1-x}\left((1 - x)y - y^2\right)dy = \sqrt{3}\int_0^1 xdx\left(\left.\left((1 - x)\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\right|_0^{1-x}\right) =$$
$$= \sqrt{3}\int_0^1 xdx\left(\frac{(1-x)^3}{2} - \frac{(1-x)^3}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 x(1 - x)^3dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{20} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

Задача 3. Найти $\iint_S \ xds$, где S – часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенная в первом октанте.

Уравнение верхней полусферы можно записать в виде: $z_{\text{в}} = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
Тогда $z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ и

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\, dxdy = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

Проекцией σ в этом случае является четверть круга радиуса R, лежащая в первом квадранте. Поэтому

$$\iint_S \ xds = \iint_\sigma \ x\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy \ \boxed{=}$$

перейдем в полярные координаты

$$\boxed{=}\ R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R rdr\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{R^2-r^2}} = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\, d\varphi\int_0^R \frac{r^2dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = R\cdot 1\cdot\int_0^R \frac{r^2dr}{\sqrt{R^2-r^2}}\ \boxed{=}$$

сделаем подстановку:

$$r = R\sin t\,,\ \ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], dr = R\cos t\, dt$$

$$\boxed{=}\ R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2(\sin t)^2 R\cos t dt}{\sqrt{R^2-(R\sin t)^2}} = R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cos t dt}{|\cos t|} = R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cos t dt}{\cos t} =$$
$$= R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\, dt = \frac{R^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt = \frac{R^3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{R^3}{4}\left(\sin 2t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi R^3}{4}.$$

Задача 4. Найти $\iint_S \ yds$, где S – верхняя полусфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

В этом случае также $z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ и

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\, dxdy = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

Проекцией σ в этом случае является круг радиуса R. Поэтому

$$\iint_S \ yds = \iint_\sigma \ y\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy\ \boxed{=}$$

перейдем в полярные координаты

$$\boxed{=}\ R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\,dr\,\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{R^2-r^2}} = R\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi}_{=0}\cdot\int_0^R \frac{r^2dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = 0\ .$$

Задача 5. Найти $\iint_S \sqrt{R^2-x^2-y^2}ds$, где S – нижняя полусфера $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

В этом случае $z'_x = \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ и

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

Проекцией σ в этом случае также является круг радиуса R. Поэтому

$$\iint_S \sqrt{R^2-x^2-y^2}ds = \iint_\sigma \sqrt{R^2-x^2-y^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy = R\iint_\sigma dxdy =$$
$$= R\cdot\pi R^2 = \pi R^3.$$

Задача 6. Найти $\iint_S x^2y^2ds$, где S – верхняя полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

В этом случае также $z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ и

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

Проекцией σ в этом случае является круг радиуса R. Поэтому

$$\iint_S x^2y^2ds = \iint_\sigma x^2y^2\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy\ \boxed{=}$$

перейдем в полярные координаты

$$\boxed{=}\ R\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R r\,dr\,\frac{(r\cos\varphi)^2(r\sin\varphi)^2}{\sqrt{R^2-r^2}} = \mathrm{R}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}_{\boxed{1}}\cdot\underbrace{\int_0^R\frac{r^5dr}{\sqrt{R^2-r^2}}}_{\boxed{2}}\ \boxed{\boxed{=}}$$

$$\boxed{1} = \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\underbrace{\cos 4\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}})d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}\,.$$

$$\boxed{2} = \int_0^R\frac{r^5dr}{\sqrt{R^2-r^2}}\ \boxed{=}$$

сделаем подстановку:

$$r = R\sin t\,,\ \ t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], dr = R\cos t\, dt$$

$$\boxed{\equiv} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^5(\sin t)^5 R\cos t dt}{\sqrt{R^2-(R\sin t)^2}} = R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 t \cos t dt}{|\cos t|} = R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 t\cos t dt}{\cos t} =$$

$$= R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\, dt = R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \sin t\, dt = -R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)^2 d\cos t =$$

$$= -R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos^2 t + \cos^4 t) d\cos t =$$

$$= -R^5 \left(\left(\cos t - \frac{2\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = -R^5 \left(0 - \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) \right) = R^5 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) =$$

$$= \frac{8R^5}{15}.$$

$$\boxed{\boxed{\equiv}}\ R \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8R^5}{15} = \frac{2\pi R^6}{15}.$$

Задача 7. Найти $\iint_S \frac{ds}{r^2}$, где S – часть цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченная плоскостями $z = 0$ и $z = H$, а r – расстояние от точки поверхности до начала координат.

В этом случае однозначно спроецировать часть цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \le z \le H$ на плоскость Oxy не удается. Будем проецировать на, например, плоскость Oyz, причем, однозначно можно будет только отдельно проецировать левую и правую часть цилиндра:

$$x_{\text{п}} = \sqrt{R^2 - y^2} \Longrightarrow x'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}},\ x'_z = 0$$

$$x_{\text{л}} = -\sqrt{R^2 - y^2} \Longrightarrow x'_y = \frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}},\ x'_z = 0,$$

но в обоих случаях $ds = \sqrt{1 + \frac{y^2}{R^2-y^2}}\, dydz = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}} dydz$. Поэтому

$$\iint_S \frac{ds}{r^2} = \iint_S \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}\ \boxed{\equiv}$$

так как подынтегральная функция четна по всем переменным, то

$$\boxed{\equiv}\ 2\iint_{S_{\text{п}}} \frac{ds}{x^2+y^2+z^2} = 2\iint_\sigma \frac{1}{(R^2-y^2)+y^2+z^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}} dydz =$$

$$= 2\int_{-R}^{R} \underbrace{\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}}_{\text{четная}} dy \int_0^H \frac{1}{R^2+z^2} dz = 2 \cdot 2\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}} dy \int_0^H \frac{1}{R^2+z^2} dz =$$

$$= 4R \left(\arcsin\frac{y}{R} \Bigg|_0^R \right) \left(\frac{1}{R} \operatorname{arctg}\frac{z}{R} \Bigg|_0^H \right) = 4R \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot \operatorname{arctg}\frac{H}{R} = 2\pi \operatorname{arctg}\frac{H}{R}.$$

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 2-ГО РОДА

Определение. Поверхность S называется двусторонней, если после полного однократного обхода любого замкнутого кусочно-гладкого контура, лежащего на ней, непрерывно изменяющееся направление нормали возвращается в исходное положение. Если же существует замкнутый контур, после полного однократного обхода которого нормаль меняет знак на противоположный, то поверхность односторонняя.

Пример односторонней поверхности – лист Мёбиуса.

Пусть S – гладкая двусторонняя поверхность, задаваемая уравнением $\varphi(x,y,z)=0$, причем, S взаимнооднозначно проецируется на $\sigma\subset Oxy$ и тогда может быть задана функцией $z=z(x,y)$.

И пусть $\bar{n}^+=(\cos\alpha\,,\cos\beta\,,\cos\gamma)$ – единичный вектор нормали к поверхности S, согласованный со стороной поверхности S^+.

$\bar{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ – вектор-функция, компоненты которой являются непрерывными функциями.

Тогда поверхностным интегралом 2-го рода называется

$$\iint_{S^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S\ (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds=$$
$$=\iint_S\ (\bar{F},\bar{n}^+)ds=\iint_\sigma\ (\bar{F},\bar{n}^+)\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy.$$

Итак, чтобы вычислить поверхностный интеграл 2-го рода, мы должны проделать следующую работу.

1) Найдти проекцию σ поверхности S на плоскость Oxy.
2) $\bar{n}^+=(+\text{или}-)\frac{1}{\sqrt{{\varphi'_x}^2+{\varphi'_y}^2+{\varphi'_z}^2}}(\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi'_z)$. Знак согласовывается со стороной поверхности S.
3) Найти дифференциал $ds=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy$.
4) Посчитать полученный двойной интеграл.

Замечание. Если поверхность S является непрерывной, но не гладкой, а кусочно-гладкой, то работу 1-4 придется проделывать отдельно на каждом гладком куске поверхности.

Задача 8. Найти $\iint_{S^+}xdydz+ydzdx+zdxdy$, где S^+ – внешняя сторона поверхности куба, составленная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

Напомним, что если плоскость π задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$, то вектор $\overline{N} = (a, b, c) \perp \pi$. Единичный вектор при этом будет равен $\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, b, c)$.

Вектор-функция $\bar{F}$ в этой задаче имеет вид $\bar{F} = (x, y, z)$.

Поверхность куба состоит из шести гладких кусков, каждый из которых является частью плоскости. Поэтому получаем сумму шести интегралов:

$$\iint_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy =$$
$$= \iint_{\substack{S^+_{ABCD} \\ z=0}} \ldots + \iint_{\substack{S^+_{A'B'C'D'} \\ z=1}} \ldots + \iint_{\substack{S^+_{DD'C'C} \\ y=1}} \ldots + \iint_{\substack{S^+_{AA'B'B} \\ y=0}} \ldots + \iint_{\substack{S^+_{AA'D'D} \\ x=1}} \ldots +$$
$$+ \iint_{\substack{S^+_{BB'C'C} \\ x=0}} \ldots \boxed{\equiv}$$

При этом (учитывая, что рассматриваются внешние нормали к кубу) получим

$\bar{n}^+_{ABCD} = -(0,0,1)$

$\bar{n}^+_{A'B'C'D'} = (0,0,1)$

$\bar{n}^+_{DD'C'C} = (0,1,0)$

$\bar{n}^+_{AA'B'B} = -(0,1,0)$

$\bar{n}^+_{AA'D'D} = (1,0,0)$

$\bar{n}^+_{BB'C'C} = -(1,0,0)$

и тогда

$$\boxed{\equiv} \iint_{\substack{S_{ABCD} \\ z=0}} (\bar{F}, \bar{n}^+_{ABCD}) ds + \iint_{\substack{S_{A'B'C'D'} \\ z=1}} \left(\bar{F}, \bar{n}^+_{A'B'C'D'}\right) ds + \iint_{\substack{S_{DD'C'C} \\ y=1}} \left(\bar{F}, \bar{n}^+_{DD'C'C}\right) ds +$$
$$+ \iint_{\substack{S_{AA'B'B} \\ y=0}} \left(\bar{F}, \bar{n}^+_{AA'B'B}\right) ds + \iint_{\substack{S_{AA'D'D} \\ x=1}} \left(\bar{F}, \bar{n}^+_{AA'D'D}\right) ds + \iint_{\substack{S_{BB'C'C} \\ x=0}} \left(\bar{F}, \bar{n}^+_{BB'C'C}\right) ds =$$
$$= \iint_{\substack{S_{ABCD} \\ z=0}} 0 \cdot ds + \iint_{\substack{S_{A'B'C'D'} \\ z=1}} 1 \cdot ds + \iint_{\substack{S_{DD'C'C} \\ y=1}} 1 \cdot ds +$$
$$+ \iint_{\substack{S_{AA'B'B} \\ y=0}} 0 \cdot ds + \iint_{\substack{S_{AA'D'D} \\ x=1}} 1 \cdot ds + \iint_{\substack{S_{BB'C'C} \\ x=0}} 0 \cdot ds =$$
$$= \iint_{S_{A'B'C'D'}} ds + \iint_{S_{DD'C'C}} ds + \iint_{S_{AA'D'D}} ds = 1 + 1 + 1 = 3,$$

так как поверхностный интеграл первого рода от функции, тождественно равной единице, задает площадь поверхности, а площадь грани куба с ребром, равным 1, также равна 1.

Задача 9. Найти $\iint_{S^+} x^2y^2z\,dxdy$, где S^+ – внешняя сторона нижней половины сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Вектор-функция $\bar{F}$ в этом случае имеет вид $\bar{F}=(0,0,x^2y^2z)$.

1) Проекцией σ нижней половины сферы на плоскость Oxy будет круг радиуса R.
2) Так как уравнение поверхности имеет вид $\underbrace{x^2+y^2+z^2-R^2=0}_{\varphi(x,y,z)}$, то

$$\bar{n}^+=\frac{+1}{\sqrt{{\varphi'_x}^2+{\varphi'_y}^2+{\varphi'_z}^2}}\left(\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi'_z\right)=\frac{+1}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}(2x,2y,2z)=$$

$$=\frac{+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)=\frac{+1}{\sqrt{R^2}}(x,y,z)=\frac{1}{R}(x,y,z),$$ так как на сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Знак достаточно проверить в одной точке поверхности S, в данном случае проще всего взять точку $(0,0,-R)$.

3) Найдем дифференциал $ds=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy$. Напомним, что в этом случае $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Поэтому $z'_x=\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $z'_y=\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ и

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

4) Получаем, что

$$\iint_{S^+} x^2y^2z\,dxdy=\iint_S(\bar{F},\bar{n}^+)ds=\iint_S x^2y^2z\cdot\frac{z}{R}ds=$$

$$=\frac{1}{R}\iint_S x^2y^2z^2ds=\frac{1}{R}\iint_\sigma x^2y^2(R^2-x^2-y^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=$$

$$=\iint_\sigma x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy\ \boxed{=}$$

перейдем в полярные координаты, получим

$$\boxed{=}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R rdr(r\cos\varphi)^2(r\sin\varphi)^2\sqrt{R^2-r^2}=$$

$$=\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi}_{\boxed{1}}\cdot\underbrace{\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}dr}_{\boxed{2}}\ \boxed{\boxed{=}}$$

$$\boxed{1}=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\underbrace{\cos 4\varphi}_{T_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}})d\varphi=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{2} = \int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}dr \boxed{=}$

сделаем подстановку:

$r = R\sin t\,,\ t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], dr = R\cos t\,dt$

$\boxed{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}(R\sin t)^5\sqrt{R^2-(R\sin t)^2}\,R\cos t\,dt = R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\,|\cos t|\cos t\,dt =$
$= R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\cos^2 t\,dt = R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\sin t\cos^2 t\,dt =$
$= -R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)^2\cos^2 t\,d\cos t =$
$= -R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t - 2\cos^4 t + \cos^6 t)d\cos t =$
$= -R^7\left(\left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{2\cos^5 t}{5} + \frac{\cos^7 t}{7}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = R^7\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right) = \frac{8R^7}{105}$

$\boxed{\boxed{=}}\ \frac{\pi}{4}\cdot\frac{8R^7}{105} = \frac{2\pi R^7}{105}$.

Задача 10. Найти $\iint_{S^+} zdxdy$, где S^+ – внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Вектор-функция $\bar{F}$ в этом случае имеет вид $\bar{F}=(0{,}0,z)$.

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases}\frac{x}{a}=u\\ \frac{y}{b}=v\\ \frac{z}{c}=w\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=au\\ y=bv\\ z=cw\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}dx=adu\\ dy=bdv\\ dz=cdw\end{cases},\ \text{тогда}$$

$\iint_{S^+} zdxdy = \iint_{(S^+)'} abcwdudv \boxed{=}$

где $(S^+)'$ – внешняя сторона сферы $u^2+v^2+w^2=1.$

Тогда (см. предыдущие задачи)

$\bar{n}^+ = \frac{1}{1}(u,v,w)$

$dS' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}dudv$ и получим, что

$\boxed{=}\ abc\iint_{(S^+)'} wdudv = abc\iint_{S'} w^2ds \boxed{=}$

так как на круг радиуса 1 будут проецироваться 2 полусферы (верхняя и нижняя), а подынтегральная функция четна по w, то получаем, что

$$\boxed{\equiv}\ 2abc\iint_{\sigma}(1-u^2-v^2)\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}dudv = 2abc\iint_{\sigma}\sqrt{1-u^2-v^2}dudv\ \boxed{\equiv}$$

перейдем в полярные координаты

$$\boxed{\equiv}\ 2abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdr = 2abc\cdot 2\pi\cdot\frac{-1}{2}\int_0^1\sqrt{1-r^2}d(1-r^2) =$$

$$= -2abc\pi\cdot\frac{2}{3}\left((1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Задача 11. Найти $\iint_{S^+} xydydz + yzdzdx + \text{x}zdxdy$, где S^+ – внешняя сторона пирамиды, составленная плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

Вектор-функция $\bar{F}$ в этом случае имеет вид $\bar{F} = (xy, yz, xz)$.

Поверхность пирамиды состоит из четырех гладких кусков, каждый из которых является частью соответствующей плоскости. Поэтому получаем сумму четырех интегралов:

$$\iint_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy =$$

$$= \iint_{\substack{S^+_{\text{нижн}}\\ z=0}}\ldots + \iint_{\substack{S^+_{\text{задн}}\\ x=0}}\ldots + \iint_{\substack{S^+_{\text{лев}}\\ y=0}}\ldots + \iint_{\substack{S^+_{\text{перед}}\\ x+y+z=1}}\ldots\ \boxed{\equiv}$$

При этом (учитывая, что рассматриваются внешние нормали к пирамиде) получим

$\bar{n}^+_{\text{нижн}} = -(0,0,1)$

$\bar{n}^+_{\text{задн}} = -(1,0,0)$

$\bar{n}^+_{\text{лев}} = -(0,1,0)$

$\bar{n}^+_{\text{перед}} = +\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

и тогда

$$\boxed{\equiv}\ \iint_{\substack{S_{\text{нижн}}\\ z=0}}(\bar{F},\bar{n}^+_{\text{нижн}})ds + \iint_{\substack{S_{\text{задн}}\\ x=0}}\left(\bar{F},\bar{n}^+_{\text{задн}}\right)ds + \iint_{\substack{S_{\text{лев}}\\ y=0}}(\bar{F},\bar{n}^+_{\text{лев}})ds +$$

$$+\iint_{\substack{S_{\text{перед}}\\ x+y+z=1}}\left(\bar{F},\bar{n}^+_{\text{перед}}\right)ds =$$

$$= \iint_{\substack{S_{\text{нижн}}\\ z=0}} -xzds + \iint_{\substack{S_{\text{задн}}\\ x=0}} -xyds + \iint_{\substack{S_{\text{лев}}\\ y=0}} -yzds +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\substack{S_{\text{перед}}\\ x+y+z=1}}(xy + yz + xz)ds =$$

$$= 0 + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\substack{S_{\text{перед}}\\ x+y+z=1}}(xy + yz + xz)ds\ \boxed{\equiv}$$

Так как на плоскости $x+y+z=1$ выполняется $z=1-x-y$ и тогда $z'_x=-1,\ z'_y=-1$, то $ds=\sqrt{3}dxdy$.

Проекцией $S_{\text{перед}}$ является прямоугольный треугольник с катетами, равными 1. Следовательно

$$\boxed{\equiv}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\sigma}\,(xy+y(1-x-y)+x(1-x-y))\sqrt{3}dxdy=$$
$$=\iint_{\sigma}\,(xy+y-xy-y^2+x-x^2-xy)dxdy=$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(-y^2+y(1-x)+x(1-x))\,dy=$$
$$=\int_0^1 dx\left(-\frac{(1-x)^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{2}+x(1-x)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{6}\int_0^1((1-x)^3+6x(1-x)^2)dx=$$
$$=\frac{1}{6}\int_0^1(1-3x+3x^2-x^3+6x-12x^2+6x^3)=\frac{1}{6}\int_0^1(1+3x-9x^2+5x^3)=$$
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{3}{2}-3+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8}\,.$$

Задача 12. Найти $\iint_{S^+} xzdydz+\text{x}ydzdx+yzdxdy$, где S^+ – внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра $x^2+y^2=R^2$ и плоскостей $x=0, y=0, z=0, z=H$.

Вектор-функция $\bar{F}$ в этом случае имеет вид $\bar{F}=(xz,xy,yz)$.

Поверхность состоит из пяти гладких кусков, поэтому получаем сумму пяти интегралов:

$$\iint_{S^+} xzdydz+\text{x}ydzdx+yzdxdy=$$

$$=\iint_{\substack{S^+_{\text{нижн}}\\ z=0}}\ldots+\iint_{\substack{S^+_{\text{верх}}\\ z=\text{H}}}\ldots+\iint_{\substack{S^+_{\text{задн}}\\ x=0}}\ldots+\iint_{\substack{S^+_{\text{лев}}\\ y=0}}\ldots+\iint_{\substack{S^+_{\text{перед}}\\ x^2+y^2=R^2}}\ldots\ \boxed{\equiv}$$

При этом (учитывая, что рассматриваются внешние нормали к поверхности) получим

$\bar{n}^+_{\text{нижн}}=-(0{,}0{,}1)$

$\bar{n}^+_{\text{верх}}=(0{,}0{,}1)$

$\bar{n}^+_{\text{задн}}=-(1{,}0{,}0)$

$\bar{n}^+_{\text{лев}}=-(0{,}1{,}0)$

$\bar{n}^+_{\text{перед}} = +\frac{1}{R}(x,y,0)$, так как $x^2+y^2=R^2 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+y^2-R^2=0}_{\varphi(x,y.z)} \Longrightarrow \varphi'_x = 2x$,
$\varphi'_y = 2y$, $\varphi'_z = 0$ и $\bar{n}^+_{\text{перед}} = +\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2}}(2x,2y,0) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0) =$
$= \frac{1}{\sqrt{R^2}}(x,y,0) = \frac{1}{R}(x,y,0)$

и тогда

$$\boxed{=} \iint_{\substack{S_{\text{нижн}}\\ z=0}} (\bar{F},\bar{n}^+_{\text{нижн}})ds + \iint_{\substack{S_{\text{верх}}\\ z=H}} (\bar{F},\bar{n}^+_{\text{верх}})ds + \iint_{\substack{S_{\text{задн}}\\ x=0}} (\bar{F},\bar{n}^+_{\text{задн}})ds +$$
$$+ \iint_{\substack{S_{\text{лев}}\\ y=0}} (\bar{F},\bar{n}^+_{\text{лев}})ds + \iint_{\substack{S_{\text{перед}}\\ x^2+y^2=R^2}} (\bar{F},\bar{n}^+_{\text{перед}})ds =$$
$$= \iint_{\substack{S_{\text{нижн}}\\ z=0}} -yzds + \iint_{\substack{S_{\text{верх}}\\ z=H}} yzds + \iint_{\substack{S_{\text{задн}}\\ x=0}} -xzds + \iint_{\substack{S_{\text{лев}}\\ y=0}} -xyds +$$
$$+ \iint_{\substack{S_{\text{перед}}\\ x^2+y^2=R^2}} \left(xz\cdot\frac{x}{R} + xy\frac{y}{R}\right)ds =$$
$$= 0 + \iint_{\substack{S_{\text{верх}}\\ z=H}} yHds + 0 + 0 + \frac{1}{R}\iint_{\substack{S_{\text{перед}}\\ x^2+y^2=R^2}} (x^2z+xy^2)ds =$$
$$= \underbrace{H\iint_{S_{\text{верх}}} yds}_{\boxed{1}} + \underbrace{\frac{1}{R}\iint_{\substack{S_{\text{перед}}\\ x^2+y^2=R^2}} (x^2z+xy^2)ds}_{\boxed{2}} \boxed{=}$$

Проекцией $S_{\text{верх}}$ является четверть круга, лежащая в первом квадранте. Следовательно,

$$\boxed{1} = H\iint_{S_{\text{верх}}} yds = H\iint_{\sigma} ydxdy = H\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r\sin\varphi\, rdr =$$
$$= H\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^R r^2dr = H\cdot 1\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{HR^3}{3}.$$

В интеграле $\boxed{2}$ будем проецировать поверхность цилиндра на плоскость Oxz, в качестве σ получим прямоугольник, дифференциал ds найдем

$x^2+y^2=R^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{R^2-x^2} \Longrightarrow y'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, $y'_z = 0$ и

$ds = \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dxdz = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdz$, поэтому

$$\boxed{2} = \frac{1}{R}\iint_{\substack{S_{\text{перед}}\\ x^2+y^2=R^2}} (x^2z+xy^2)ds = \frac{1}{R}\iint_{\sigma}\left(x^2z+x(R^2-x^2)\right)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdz =$$
$$= \int_0^R dx\int_0^H dz\left(x^2z+x(R^2-x^2)\right)\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}} =$$
$$= \int_0^R dx\int_0^H dz\frac{x^2z}{\sqrt{R^2-x^2}} + \int_0^R dx\int_0^H dz\frac{x(R^2-x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

$$= \int_0^R \frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}} dx \int_0^H z dz + \int_0^R x\sqrt{R^2-x^2} dx \int_0^H dz =$$

$$= \frac{H^2}{2} \int_0^R \frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}} dx + H \int_0^R x\sqrt{R^2-x^2} dx =$$

$$= \frac{H^2}{2} \int_0^R \frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}} dx - \frac{H}{2} \int_0^R \sqrt{R^2-x^2} d(R^2-x^2) = \left\| \begin{matrix} x = R\sin t\,,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ dx = R\cos t\,dt \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{H^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R\sin t)^2 R\cos t dt}{\sqrt{R^2-(R\sin t)^2}} - \frac{H}{2} \cdot \frac{2}{3} \left((R^2-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R \right) =$$

$$= \frac{H^2R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt + \frac{H}{3} \cdot R^3 = \frac{H^2R^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t) dt + \frac{HR^3}{3} =$$

$$= \frac{H^2R^2}{4} \left(\left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) + \frac{HR^3}{3} = \frac{H^2R^2}{4} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{HR^3}{3} = \frac{\pi H^2R^2}{8} + \frac{HR^3}{3},$$

$$\boxed{=} \frac{HR^3}{3} + \frac{\pi H^2R^2}{8} + \frac{HR^3}{3} = \frac{2HR^3}{3} + \frac{\pi H^2R^2}{8}.$$

Задача 13. Найти $\iint_{S^+} xzdydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy$, где S^+ – внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра $x^2+y^2=1$, параболоида $z = x^2+y^2$ и плоскостей $x=0, y=0, z=0$.

Вектор-функция $\bar{F}$ в этом случае имеет вид $\bar{F} = (xz, x^2y, y^2z)$.

Поверхность состоит из пяти гладких кусков, поэтому получаем сумму пяти интегралов:

$$\iint_{S^+} xzdydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy =$$

$$= \iint_{\substack{S^+_{\text{нижн}} \\ z=0}} \ldots + \iint_{\substack{S^+_{\text{верх}} \\ z=x^2+y^2}} \ldots + \iint_{\substack{S^+_{\text{задн}} \\ x=0}} \ldots + \iint_{\substack{S^+_{\text{лев}} \\ y=0}} \ldots + \iint_{\substack{S^+_{\text{перед}} \\ x^2+y^2=1}} \ldots \boxed{=}$$

При этом (учитывая, что рассматриваются внешние нормали к поверхности) получим

$\bar{n}^+_{\text{нижн}} = -(0,0,1)$

$\bar{n}^+_{\text{верх}} = (0,0,1)$, так как $x^2+y^2 = z \Leftrightarrow \underbrace{x^2+y^2-z=0}_{\varphi(x,y.z)} \Rightarrow$

$\varphi'_x = 2x, \varphi'_y = 2y,\ \varphi'_z = -1$ и $\bar{n}^+_{\text{верх}} = -\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(2x, 2y, -1)$

$\bar{n}^+_{\text{задн}} = -(1,0,0)$

$\bar{n}^+_{\text{лев}} = -(0,1,0)$

$\bar{n}^+_{\text{перед}} = (x, y, 0)$, так как $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2 - 1 = 0}_{\varphi(x,y.z)} \Longrightarrow \quad \varphi'_x = 2x$,

$\varphi'_y = 2y,\ \varphi'_z = 0$ и $\bar{n}^+_{\text{перед}} = +\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2}}(2x, 2y, 0) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y, 0) =$

$= \frac{1}{1}(x, y, 0) = (x, y, 0)$

и тогда

$$\boxed{=} \iint_{\substack{S_{\text{нижн}} \\ z=0}} (\bar{F}, \bar{n}^+_{\text{нижн}})ds + \iint_{\substack{S_{\text{верх}} \\ z=x^2+y^2}} \left(\bar{F}, \bar{n}^+_{\text{верх}}\right)ds + \iint_{\substack{S_{\text{задн}} \\ x=0}} \left(\bar{F}, \bar{n}^+_{\text{задн}}\right)ds +$$

$$+ \iint_{\substack{S_{\text{лев}} \\ y=0}} (\bar{F}, \bar{n}^+_{\text{лев}})ds + \iint_{\substack{S_{\text{перед}} \\ x^2+y^2=1}} \left(\bar{F}, \bar{n}^+_{\text{перед}}\right)ds =$$

$$= \iint_{\substack{S_{\text{нижн}} \\ z=0}} -y^2 z ds + \iint_{\substack{S_{\text{верх}} \\ z=x^2+y^2}} \frac{-2x^2z - 2x^2y^2 + y^2z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} ds + \iint_{\substack{S_{\text{задн}} \\ x=0}} -xz ds$$

$$+ \iint_{\substack{S_{\text{лев}} \\ y=0}} -x^2 y ds + \iint_{\substack{S_{\text{перед}} \\ x^2+y^2=1}} (x^2z + x^2y^2)ds =$$

$$= 0 + \iint_{\substack{S_{\text{верх}} \\ z=x^2+y^2}} \frac{-2x^2z - 2x^2y^2 + y^2z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} ds + 0 + 0 +$$

$$+ \iint_{\substack{S_{\text{перед}} \\ x^2+y^2=1}} (x^2z + x^2y^2)ds =$$

$$= \underbrace{\iint_{\substack{S_{\text{верх}} \\ z=x^2+y^2}} \frac{-2x^2z - 2x^2y^2 + y^2z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} ds}_{\boxed{1}} + \underbrace{\iint_{\substack{S_{\text{перед}} \\ x^2+y^2=1}} (x^2z + x^2y^2)ds}_{\boxed{2}} \boxed{\boxed{=}}$$

Проекцией $S_{\text{верх}}$ является четверть круга радиуса 1, лежащая в первом квадранте. Дифференциал ds будет равен:

$z = x^2 + y^2 \Longrightarrow ds = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy.$

Следовательно,

$$\boxed{1} = \iint_{\substack{S_{\text{верх}} \\ z=x^2+y^2}} \frac{-2x^2z - 2x^2y^2 + y^2z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} ds =$$

$$\iint_{\sigma} \frac{-2x^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2 + y^2(x^2+y^2)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy =$$

$$= \iint_{\sigma} \left(-2x^2(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 + y^2(x^2 + y^2)\right)dxdy =$$

перейдем в полярные координаты

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (-2(r\cos\varphi)^2 r^2 - 2(r\cos\varphi)^2 (r\sin\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 r^2) r dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\cos^2\varphi - 2\cos^2\varphi \sin^2\varphi + \sin^2\varphi) d\varphi \int_0^1 r^5 dr =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-1 - \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(-\frac{3}{4}t - \frac{3}{4}\sin\varphi + \frac{1}{16}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{16}\,.$$

В интеграле $\boxed{2}$ будем проецировать поверхность цилиндра на плоскость Oxz, в качестве σ получим квадрат со стороной 1, дифференциал ds найдем из условий:

$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}},\ y'_z = 0$ и

$ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,dxdz = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdz,$ поэтому

$$\boxed{2} = \iint\limits_{\substack{S_{\text{перед}} \\ x^2+y^2=1}} (x^2 z + x^2 y^2) ds = \iint_\sigma \left(x^2 z + x^2(1-x^2)\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdz =$$

$$= \iint_\sigma \frac{x^2 z}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdz + \iint_\sigma \frac{x^2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdz =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \int_0^1 z dz + \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \int_0^1 dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= \left\|\begin{matrix} x = \sin t\,,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ dx = \cos t\, dt \end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^2 \cos t dt}{\sqrt{1-(\sin t)^2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 \sqrt{1-(\sin t)^2}\cos t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^2 \cos t dt}{|\cos t|} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 |\cos t| \cos t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^2 \cos t dt}{\cos t} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 (\cos t)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t) dt + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t) dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}\,.$$

$$-\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{8}\,.$$