МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЧАСТЬ 2

В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

УДК 512.6

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу линейной алгебры, читаемому студентам первого курса химического факультета МГУ.

Системы линейных уравнений. Векторные пространства

§1. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений

Перейдём к исследованию вопроса о решении системы линейных уравнений $\boldsymbol{A}\bar{x}$=$\bar{b}$ в общем случае, не делая предположений о том, что существует отличный от нуля определитель матрицы этой системы. (Это – аналог уравнения $ax = b$ без условия $a \neq 0$). Пусть система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\bar{x}=\bar{b}\ . \qquad (2.1)$$

Изложим метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса решения этой системы). Если $\boldsymbol{A}$ – нулевая матрица, то для $\bar{b} = \bar{0} \in \mathbb{R}^m$ решением системы является любой вектор $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, а для $\bar{b} \neq \bar{0} \in \mathbb{R}^m$, решений нет.

Пусть среди чисел a_{ij} есть отличные от 0. Можно считать, что $a_{11} \neq 0$, поскольку нумерация переменных и нумерация уравнений в нашем распоряжении.

(Пояснение: если, например, в исходной системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

$a_{11} = 0$, а $a_{22} \neq 0$, то введем в рассмотрение переменные $y_1 = x_2$, $y_2 = x_1$,$y_3 = x_3$

и получим систему в новых переменных

$$\begin{cases} a_{11}y_2 + a_{12}y_1 + a_{13}y_3 = b_1 \\ a_{21}y_2 + a_{22}y_1 + a_{23}y_3 = b_2 \end{cases}$$

далее, поменяв местами уравнения,

$$\begin{cases} a_{22}y_1 + a_{21}y_2 + a_{23}y_3 = b_2 \\ a_{12}y_1 + a_{11}y_2 + a_{13}y_3 = b_1 \end{cases}$$

и введя обозначения $a_{22} = \widetilde{a_{11}}, a_{21} = \widetilde{a_{12}}$, $a_{23} = \widetilde{a_{13}}$,$b_2 = \widetilde{b_1}$, $a_{12} = \widetilde{a_{21}}$, $a_{11} = \widetilde{a_{22}}$, $a_{13} = \widetilde{a_{23}}$, $b_1 = \widetilde{b_2}$, получим систему

$$\begin{cases}\widetilde{a_{11}}y_1 + \tilde{a}_{12}y_2 + \widetilde{a_{13}}y_3 = b_1\\ \widetilde{a_{21}}y_1 + \widetilde{a_{22}}y_2 + \widetilde{a_{23}}y_3 = b_2\end{cases}$$

Найдя её решение y_1, y_2, y_3 то мы, тем самым, найдем x_1, x_2, x_3 -компоненты решения исходной системы.

Итак, пусть $a_{11} \neq 0$. Вычтем теперь из второго уравнения системы первое её уравнение, умноженное на $\frac{a_{22}}{a_{11}}$. При этом получаем систему, равносильную исходной, второе уравнение которой не содержит переменной x_1.

Проделав аналогичные процедуры с остальными уравнениями (т.е. вычитая из каждого первое уравнение, умноженное на $\frac{a_{k1}}{a_{11}}$), получим систему, равносильную исходной, у которой все уравнения, начиная со второго, не содержат переменной x_1. Оставляя без изменений первое уравнение системы, рассмотрим остальные её $m-1$ уравнений, которые образуют систему вида:

$$\begin{cases}a'_{22}x_2 + \cdots + \quad a'_{2n}x_n = \quad b'_2\\ \quad\quad \ldots\\ a'_{m2}x_2 + \cdots + \quad a'_{mn}x_n = \quad b'_m\end{cases}$$

Снова можно считать, что $a_{22} \neq 0$,т.к. перестановка уравнений не меняет систему, а изменение нумерации неизвестных $x_2, .., x_n$ в этой системе приведет к изменению нумерации этих же переменных в первом (оставшемся) уравнении. Сделаем с этой системой аналогичные, описанные выше преобразования и приведем в результате к системе уравнений вида

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\ a'_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a'_{1n}x_n = b'_2\\ a''_{33}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a''_{3n}x_n = b''_3\\ a''_{m3}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a''_{mn}x_n = b''_m\end{cases},$$

в которой все уравнения, начиная со второго, не содержат переменных x_1и x_2.

Полученную систему подвергнем тем же преобразованиям и т.д.

Если в процессе преобразований получено уравнение, у которого все коэффициенты и свободный член равны 0,то мы убираем его из системы.

Когда остановится процесс, и к каким результатам он может привести?

Если мы пришли к системе, одно из уравнений которой, имеет отличный от $\mathbf{0}$ свободный член, а остальные коэффициенты равны $\mathbf{0}$, то полученная система, а вместе с ней и равносильная ей исходная система, ***несовместна***.

В противном случае, получится система из $l, l \leq m$ уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1,l}x_l+a_{1,l+1}x_{l+1}+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2`+\dots+\tilde{a}_{2l}`x_l+\dots+\tilde{a}_{2n}x_n=\tilde{b}_2 \\ \dots \\ \tilde{a}_{ll}x_l+\dots+\tilde{a}_{l,l+1}x_{l+1}+\dots+\tilde{a}_{l,n}x_n=\tilde{b}_l \end{cases}, \tag{2.2}$$

у которой $a_{11} \neq 0, \tilde{a}_{22} \neq 0, \tilde{a}_{ll} \neq 0$.

Если $l = n$, то полученная система имеет единственное решение.

Действительно, из её последнего уравнения находим $x_n = \frac{\tilde{b}_n}{\tilde{a}_{nn}}$

и затем, подставляя это значение в предпоследнее уравнение, найдем x_{n-1}, после чего, подставляем x_n и x_{n-1}в предыдущее уравнение, найдем x_{n-2} и так далее.

Если же $l < n$, то эту систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1,l}x_l=b_1-a_{1,l+1}x_{l+1}-\dots-a_{1n}x_n \\ \tilde{a}_{22}x_2+\dots+\tilde{a}_{2l}x_l=\tilde{b}_2-\tilde{a}_{2,l+1}\tilde{x}_{l+1}-\dots-\tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n \\ \tilde{a}_{l,l}x_l=\tilde{b}_l-\tilde{a}_{l,l+1}x_{l+1}-\dots-\tilde{a}_{l,n}\tilde{x}_n \end{cases} \tag{2.3}$$

Придавая переменным $x_{l+1}, \dots, x_n$ произвольные значения, получаем из этой системы соответствующие, однозначно определённые, значения остальных переменных.

Равенства (2.3) представляют собой алгоритм решения системы (2.1), но не дают явного описания структуры множества её решений.

Для этого нам потребуется сначала описать свойства решений такой системы и ввести в рассмотрение ряд новых важных понятий.

Рассмотрим сначала так называемую однородную систему уравнений

$\boldsymbol{A}\bar{x}=\bar{0}$. Заметим, что если векторы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ являются решениями этой системы, то их сумма $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ также является решением этой системы.
Действительно, $\boldsymbol{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \boldsymbol{A}\bar{x}_1 + \boldsymbol{A}\bar{x}_2 = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$. Кроме того, если вектор $\bar{x}$ —решение этой системы, т.е. $\boldsymbol{A}\bar{x}=\bar{0}$, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ вектор $\lambda\bar{x}$ тоже является решением этой системы, так как $\boldsymbol{A}(\lambda\bar{x})= \lambda\boldsymbol{A}\bar{x} = \lambda\bar{0} = \bar{0}$.

Это означает, что множество решений однородной системы $\boldsymbol{A}\bar{x}=\bar{0}$ образует так называемое векторное пространство. К изучению этого понятия мы и переходим.

§2. Векторные пространства

2.1. Определение векторного пространства

Начнём с рассмотрения важного общего понятия ***линейного*** или ***векторного пространства*** (эти слова - синонимы). Примеры векторных пространств приведены ниже.

<u>Определение</u>: Непустое множество V элементов $\bar{x}$, называемых ***векторами***, в котором введены операции суммы векторов, сопоставляющей каждой паре $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in V$ вектор $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in V$, и операция произведения числа $\lambda \in \mathbb{R}$ на вектор, дающая вектор $\lambda\,\bar{x} \in V$, называется ***векторным пространством***, если эти операции подчиняются следующим законам (аксиомам векторного пространства):

1. Для любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in V$

$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{x}_2 + \bar{x}_1$, т.е. сложение векторов – коммутативно.

2. Для любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \in V$

$\bar{x}_1 + (\bar{x}_2 + \bar{x}_3) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + \bar{x}_3$, т.е. сложение векторов – ассоциативно.

3. Существует ***нейтральный элемент*** по сложению, обозначаемый $\bar{0}$ такой, что для любого $\bar{x} \in V$:

$\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$

Легко доказать, что такой элемент ровно один: Если есть два элемента с таким свойством, скажем, $\bar{0}_1$ и $\bar{0}_2$, то $\bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2 + \bar{0}_1 = \bar{0}_1$ и $\bar{0}_2 + \bar{0}_1 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2 + \bar{0}_1 = \bar{0}_2$, откуда $\bar{0}_1 = \bar{0}_2$.

4. Для любого $\bar{x} \in V$ существует ***обратный элемент по сложению***,

обозначаемый $-\bar{x}$ такой, что: $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$.

(Легко доказать единственность обратного элемента)

Первые 4 аксиомы означают, что по отношению к операции сложения векторное пространство представляет собой коммутативную (или, что то же самое, абелеву) группу. Понятие группы и его приложения будет подробнее изучено далее.

5. Для любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in V$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \lambda\bar{x}_1 + \lambda\bar{x}_2$.

6. Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и любого $\bar{x} \in V$:

$(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$, $(\lambda\mu)\bar{x} = \lambda(\mu\bar{x})$.

7. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda\bar{0} = \bar{0}.$$

8. Для любого $\bar{x} \in V$

$$0 \cdot \bar{x} = \bar{0}\,, \quad 1 \cdot \bar{x} = \bar{x}.$$

<u>Примеры:</u>

1. Само множество $\mathbb{R}$ действительных чисел с обычными операциями умножения и сложения – векторное пространство.

2. Множество векторов на плоскости и в пространстве с обычными операциями суммы векторов и умножения векторов на число – векторные пространства.

3. Множество наборов чисел $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n,$, в котором введены операции сложения векторов:

   $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

   и умножения вектора на число:

   $\lambda\bar{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

   образует векторное пространство $\mathbb{R}^n$, называемое n ***–мерным арифметическим пространством.*** Термин n-мерное, хотя и очевиден в данном примере, будет подробно изучен ниже.

   Отметим, что при введении координат на плоскости или в пространстве геометрические векторы обладали теми же свойствами операций, что и их изображения наборами координат, что позволяло нам отождествлять множество векторов плоскости с пространством $\mathbb{R}^2$ и множество векторов пространства с $\mathbb{R}^3$.

4. Множество непрерывных на отрезке функций с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число – векторное пространство.

2.2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Пусть $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Определение. Выражение

$$c_1\bar{x}_1 + \dots + c_n\bar{x}_n \tag{2.4}$$

называется ***линейной комбинацией*** векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ с коэффициентами $c_1, \dots, c_n$.

(Ясно, что $c_1\bar{x}_1 + \dots + c_n\bar{x}_n$ тоже является элементом V, т.е. вектором.)

Если $c_1 = \dots = c_n = 0$, то линейная комбинация

$0 \cdot \bar{x}_1 + \dots + 0 \cdot \bar{x}_n = \bar{0}$ называется ***тривиальной***.

Если среди чисел $c_1, \dots, c_n$ имеются отличные от 0 (что для $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ равносильно условию $c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0$), то линейная комбинация (2.4) называется ***нетривиальной***.

<u>Определение</u>: Векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют их нетривиальная линейная комбинация (2.4), равная нулевому вектору, т.е. если существуют $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, $c_1^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0$ такие, что:

$$c_1\bar{x}_1 + \cdots + c_n\bar{x}_n = \bar{0}. \qquad (2.5)$$

<u>Определение</u>: Если из равенства (2.4) вытекает, что $c_1 = \cdots = c_n = 0$, то векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$ называются ***линейно независимыми***.

Другими словами, любая нетривиальная линейная комбинация линейно независимых векторов отлична от нулевого вектора.

<u>Примеры:</u>

1. Векторы $(0;1), (1;0)$ пространства $\mathbb{R}^2$линейно независимы.
   Действительно, если их линейная комбинация равна нулевому вектору, т.е.
   $c_1(0;1) + c_2\,(1;0) = (c_1; c_2) = (0;0)$,
   то $c_1 = c_2 = 0$.

2. Функции $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$, рассматриваемые как элементы векторного пространства непрерывных на всей прямой функций, линейно зависимы, так как нулевым вектором этого пространства является тождественно равная нулю функция и имеет место тождество
   $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$.

Это – нетривиальная линейная комбинация рассматриваемых функций с коэффициентами 1,1 и -1.

<u>Теорема 2.1.</u>

Если векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$ линейно зависимы, то существует число $i, 1 \leq i \leq n$ такое,что вектор $\bar{x}_i$ является линейной комбинацией остальных векторов.

<u>Доказательство</u>.

►Пусть выполнено равенство (2.5).

Среди чисел $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ есть отличные от нуля по определению линейной зависимости векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$. Пусть $c_i \neq 0$. Тогда из (2.5) получим:

$$c_i\bar{x}_i = -c_1\bar{x}_1 + \cdots - c_{i-1}\bar{x}_{i-1} - c_{i+1}\bar{x}_{i+1} - \cdots - c_n\bar{x}_n$$

и, так как $c_i \neq 0$:

$$\bar{x}_i = -\frac{c_1}{c_i}\bar{x}_1 + \cdots - \frac{c_{i-1}}{c_i}\bar{x}_{i-1} - -\frac{c_{i+1}}{c_i}\bar{x}_{i+1} - \cdots - \frac{c_n}{c_i}\bar{x}_n. ◄$$

Теорема 2.2.

Если среди n векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$ есть $k, k < n$ линейно зависимых векторов, то и векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$ линейно зависимы.

Доказательство.

► Без ограничения общности пусть $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ линейно зависимы (нумерация векторов в нашем распоряжении). Тогда

$$c_1\bar{x}_1 + \cdots + c_k\bar{x}_k = \bar{0} \qquad (2.6)$$

и среди чисел $c_1, \dots, c_k$ есть отличные от 0. Полагая $c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$, получим, ввиду (2.6), что:

$$c_1\bar{x}_1 + \cdots + c_k\bar{x}_k + 0 \cdot \bar{x}_{k+1} + \cdots + 0 \cdot \bar{x}_n = \bar{0} \qquad (2.7)$$

и линейная комбинация в правой части (2.7) нетривиальная, так как среди чисел $c_1, \dots, c_k$ есть отличные от 0.

Чтобы не забывать о системах уравнений, представим себе, что строки матрицы $\boldsymbol{A}$ системы линейных однородных уравнений

$$\boldsymbol{A}\bar{x} = \bar{0} \qquad (2.8)$$

линейно зависимы.

Это означает, согласно предыдущей теореме, что среди этих строк есть строка, например, с номером i, представляющая собой линейную комбинацию остальных. Это означает, что i –ое уравнение системы (2.8) есть линейная комбинация остальных, т.е. это уравнение — лишнее в системе, оно следует из остальных. Значит, одной из наших задач (которые мы подробней рассмотрим позже) является избавление от лишних уравнений в системе (2.8), что означает получение матрицы системы, строки которой линейно независимы.

2.3. Размерность векторного пространства. Его базис.

Определение: Будем говорить, что ***размерность*** пространства V равна числу n (что обозначается так: $\dim V = n$), если в нем существуют линейно независимые векторы $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ такие, что для любого вектора $\bar{x} \in V$ существуют числа $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ такие, что $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$.

При этом векторы $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ называются ***базисом*** пространства V, а числа $x_1, \dots, x_n$ - ***координатами*** вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

Пространство, имеющее конечную размерность, называется ***конечномерным***.

Примеры:

1. Размерность пространства $\mathbb{R}^3$ равна 3, т.к. векторы $\bar{e}_1$=(1,0,0), $\bar{e}_2$=(0,1,0), $\bar{e}_3$=(0,0,1), линейно независимы и для любого вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ имеет место равенство: $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$.

2. Вполне аналогично, размерность $\mathbb{R}^n$ равна n.

Для этого достаточно установить следующую полезную **лемму**:

Лемма 1.

Если линейно независимые векторы $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_l$ являются линейными комбинациями векторов $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k$, то $k \geq l$.

Доказательство леммы будет приведено позднее.

Теорема 2.3.

Размерность пространства определена корректно, т.е. любые два его базиса имеют одинаковое число векторов.

Доказательство.

►Из леммы 1 следует, что если $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m$ – два базиса пространства V, то, поскольку, например, любой вектор $\bar{g}_i$ есть линейная комбинация векторов $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, то $n \geq m$. Обратно, любой вектор $\bar{e}_j$ есть линейная комбинация векторов $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m$, следовательно, $n \leq m$. Таким образом, $n = m$ и размерность пространства определена корректно. ◄

Теорема 2.4.

Любому элементу $\bar{x} \in V$ отвечает единственный набор координат $x_1, \dots, x_n$ в базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

Доказательство.

►Действительно, если бы было

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \cdots + x_n\bar{e}_n = y_1\bar{e}_1 + \cdots + y_n\bar{e}_n,$$

то $\bar{0} = (x_1 - y_1)\bar{e}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\bar{e}_n$,

откуда $x_1 - y_1 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$ ввиду линейной независимости векторов $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.◄

<u>Замечание.</u> Сумма векторов $\bar{x}, \bar{y} \in V$ с координатами $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ есть вектор $\bar{x} + \bar{y}$ с координатами $(x_1 + y, \dots, x_n + y_n)$, так как

$$\bar{x} + \bar{y} = x_1\bar{e}_1 + \cdots + x_n\bar{e}_n + y_1\bar{e}_1 + \cdots + y_n\bar{e}_n = (x_1 + y_1)\bar{e}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\bar{e}_n.$$

Вектор $\lambda\bar{x}$, $\bar{x} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, имеет координаты $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Это означает, что операциям с векторами соответствуют операции со строками их координат.

Таким образом, мы установили, что для любого векторного пространства V размерности n существует взаимообратное отображение этого пространства в пространстве R^n, при котором сумме векторов $\bar{x}, \bar{y} \in V$ сопоставляется сумма соответствующих им векторов из пространства $\mathbb{R}^n$, а вектору $\lambda\bar{x} \in V$ соответствует произведение на число λ соответствующего вектора из $\mathbb{R}^n$.

Это обстоятельство именуется ***изоморфизмом*** пространств V и $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, доказана еще одна теорема

<u>Теорема 2.5.</u>

Любое n -мерное векторное пространство V изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$.

§3.Свойства линейно независимых векторов. Подпространство

3.1. Свойства линейно независимых векторов

Вернёмся к однородной системе линейных уравнений $\boldsymbol{A}\bar{x}=\bar{0}$, множество решений которой образует векторное пространство. Нас будет интересовать естественный вопрос о размерности этого пространства и о его базисе.

Отметим важное для дальнейшего изложения следствие полученных результатов.

<u>Лемма 2.2.</u>

При $m < n$ система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\quad\quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

имеет отличные от $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ *решения, и таких решений— бесконечное множество.*

Доказательство.

►В самом деле, применяя к системе (2.9) метод Гаусса, получим равносильную ей систему вида (2.3) с $b_1 = \tilde{b}_2 = \cdots = \tilde{b}_l = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1,l}x_l = -a_{1,l+1}x_{l+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{2l}x_l = -\tilde{a}_{2,l+1}x_{l+1} - \cdots - \tilde{a}_{2n}x_n \\ \quad\quad \tilde{a}_{l,l}x_l = -\tilde{a}_{l,l+1}x_{l+1} - \cdots - \tilde{a}_{l,n}x_n. \end{cases}$$

Так как $m < n$, то и $l < n$.

Как отмечено выше, при произвольном выборе чисел $x_{l+1}, \ldots, x_n$ мы получим соответствующие числа $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $x_1, \ldots, x_n$ − это решение системы (2.9).

Выбирая $x_{l+1}, \ldots, x_n$ так, чтобы хотя бы одно из них не равнялось 0, получим утверждение леммы. (Таких выборов – бесконечное множество.) ◄

Эта лемма позволяет дать доказательство леммы 1.

Напомним ее формулировку.

Лемма 2.1. *Если линейно независимые векторы $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_l$ являются линейными комбинациями векторов $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k$, то $l \leq k$.*

Доказательство.

►Действительно, пусть

$$\bar{g}_1 = c_{11}\bar{f}_1 + \cdots + c_{k,1}\bar{f}_k$$

$$\ldots$$

$$\bar{g}_l = c_{1l}\bar{f}_1 + \cdots + c_{k,l}\bar{f}_k$$

Если числа $x_1, \ldots, x_l$ таковы, что

$$x_1\bar{g}_1 + \cdots + x_l\bar{g}_l = \bar{0}, \tag{2.10}$$

то, заменяя векторы $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_l$ их выражениями через $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k$, получаем

$$x_1(c_{11}\bar{f}_1 + \cdots + c_{k,1}\bar{f}_k) + \ldots + x_l(c_{1l}\bar{f}_1 + \cdots + c_{k,l}\bar{f}_k) = \bar{0}$$

или

$$(c_{11}x_1 + \cdots + c_{1l}x_l)\bar{f_1} + \cdots + (c_{k,1}x_1 + \cdots + c_{k,l}x_{l)}\bar{f_k} \ = \bar{0}$$

При этом, разумеется, это равенство выполняется, если выполнены равенства

$$\begin{cases} (c_{11}x_1 + \cdots + c_{1l}x_l) = \ 0 \\ \qquad \ldots \\ (c_{k,1}x_1 + \cdots + c_{k,l}x_l) = \ 0 \end{cases} \qquad (2.11)$$

Таким образом, для любого решения системы (2.11) выполняется равенство (2.10). При $k < l$ система (3.11), по лемме 1 имеет отличные от

$$x_1 = 0, \ldots, x_l = 0$$

решения, что дает противоречие с условием линейной независимости векторов дает $g_1, \ldots, g_l$. ◄

Напомним, что из леммы 1 следовало, что любые два базиса конечномерного пространства имеют одинаковое число элементов. Это означает, что размерность пространства определена корректно.

Теорема 2.6.

Пусть $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m \in V -$ *линейно независимые векторы n-мерного пространства V и* $m < n$. *Тогда векторы* $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$ *можно дополнить до базиса пространства V .*

Доказательство.

►Требуется доказать, что в пространстве V есть $n - m$ векторов, которые мы обозначим $\bar{a}_{m+1}, \ldots, \bar{a}_n$ такие, что векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ линейно независимы (и, следовательно, образуют базис *n*-мерного пространства). Докажем сначала, что есть хотя бы один вектор $\bar{a}_{m+1} \in V$ такой, что векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$ и $\bar{a}_{m+1}$ линейно независимы. Предположим противное: для любого $\bar{a} \in V$ существуют не все равные нулю числа $c_1, \ldots, c_{m+1}$ такие, что

$$c_1\bar{a}_1 + \cdots + c_m\bar{a}_m + c_{m+1}\bar{a}_{m+1} = \bar{0}.$$

Число $c_{m+1} \neq 0,$ иначе мы получили бы, что векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$ линейно зависимы, вопреки условию.

Тогда любой вектор $\bar{a} \in V$ есть линейная комбинация $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$. Значит, $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$ является базисом пространства V. Но любой базис V, как доказано, имеет n векторов. Полученное противоречие с условием теоремы $m < n$ доказывает существование вектора $\bar{a}_{m+1}$ линейно независимого с векторами $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$. Далее, если $m + 1 < n$ доказываем, что существует $\bar{a}_{m+2} \in V$ такой, что $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m+2}$ линейно независимы и т.д.◄

3.2. Линейная оболочка системы векторов. Подпространство

Ранее мы часто встречались с линейными комбинациями уравнений и, соответственно, с линейными комбинациями векторов – строк матрицы системы.

Рассмотрим в общем виде вопрос о том, что представляют собой всевозможные линейный комбинации векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in V$.

Определение : Множество

$$L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = \{c_1\bar{a}_1 + \dots + c_m\bar{a}_m, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

всевозможных линейных комбинаций векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in V$ называется ***линейной оболочкой*** векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in V$.

Теорема 2.7.

Линейная оболочка $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ *представляет собой линейное пространство с теми же операциями сложения и умножения на число, что были введены в пространстве* V.

Доказательство.

►Требуется проверить, что если $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in L$, то $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in L$ и если $\alpha \in \mathbb{R}, \bar{x} \in L$, то $\alpha\,\bar{x} \in L$.

Действительно, пусть $\bar{x}_i = c_{i1}\bar{a}_1 + \dots + c_{im}\bar{a}_m, i = 1,2$. Тогда $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = (c_{11} + c_{21})\bar{a}_1 + \dots + (c_{1m} + c_{2m})\bar{a}_m$.

Итак, вектор $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$тоже имеет вид линейной комбинации векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ и, следовательно, принадлежит L. Аналогично, для $\bar{x} = c_1\bar{a}_1 + \dots + c_m\bar{a}_m$ вектор $\alpha\,\bar{x} = \alpha c_1\bar{a}_1 + \dots + \alpha c_m\bar{a}_m$ и принадлежит L.◄

Определение: Подмножество линейного пространства V , которое само является линейным пространством относительно операций пространства V, называют ***подпространством пространства*** V.

Теорема 7 допускает эквивалентную формулировку.

Теорема 2.8.

Линейная оболочка $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ *является подпространством* V.

В этом случае говорят, что подпространство L ***порождено векторами*** $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in V$ (или ***натянуто на векторы*** $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in V$).

Пример:

Пусть $V = \mathbb{R}^3$, $\bar{a}_1 = (1; 0; 0), \bar{a}_2 = (0; 1; 0)$.

Тогда $L(\bar{a}_1\bar{a}_2) = \{(\bar{x} = (x_1, x_2, 0)|x_1, x_2 \in \mathbb{R})\}$.

Исследуем вопрос о размерности и базисе подпространства $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$.

Теорема 2.9.

Если векторы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ линейно независимые, то размерность подпространства $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ равна m, а векторы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ образуют его базис.

Замечание: Напомним, что размерность пространства V обозначается $\dim V$, поэтому первое утверждение теоремы 9 можно записать в виде: если $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ линейно независимы, то $\dim L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = m$.

Доказательство.

► Поскольку, по определению, $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ состоит из линейных комбинаций векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$, для любого $\bar{a} \in L$ существуют $c_1, \dots, c_m$ такие, что $\bar{a} = c_1\bar{a}_1 + \dots + c_m\bar{a}_m$. Таким образом, линейно независимые векторы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ образуют базис пространства $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$.◄

Теорема 2.10.

Любое подпространство L пространства V является линейной оболочкой некоторых векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$.

Доказательство.

►Если подпространство L состоит только из нулевого вектора $\bar{0}$,то утверждение теоремы очевидно. Если же в L есть вектор $\bar{a}_1 \neq \bar{0}$ то, используя теорему 3.1, можно дополнить $\bar{a}_1$ до базиса $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ подпространства L. Так как, по определению базиса, любой вектор из L является линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$, то по определению линейной оболочки имеет место равенство:

$L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = L$.◄

Примечание: Разумеется, само векторное пространство V является линейной оболочкой любого своего базиса $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

Какова же размерность $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ в случае, когда векторы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ линейно зависимы?

Теорема 2.11.

Если $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ линейно зависимы и максимальное число линейно независимых среди них равно l, то:

$\dim L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = l$.

Доказательство.

►Пусть, например, $\bar{a}_1, \dots, \overline{a_l}$ линейно независимы, тогда любой вектор $\bar{a}_{l+1}, \dots, \bar{a}_m$линейно выражается через $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l$. Например, векторы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l, \bar{a}_{l+1}$ линейно зависимы, так как их больше, чем l. Поэтому существуют числа $c_1, \dots, c_{l+1}$, не все равные 0 такие, что:

$$\bar{0} = c_1\bar{a}_1 + \dots + c_{l+1}\bar{a}_{l+1}$$

Число $c_{l+1} \neq 0$, иначе векторы $\overline{a_1}, \dots, \bar{a}_l$ оказались бы линейно зависимыми вопреки условию. Следовательно,

$$\bar{a}_{l+1} = -\frac{c_1}{c_{l+1}}\bar{a}_1 - \dots - \frac{c_l}{c_{l+1}}\bar{a}_l, \qquad (2.12)$$

что и утверждалось.

Аналогично доказываем, что так как $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l, \bar{a}_j, j = l+2, \dots, m$ линейно зависимы, каждый вектор $\bar{a}_j, j = l+2, \dots, m$ есть линейная комбинация векторов $\overline{a_1}, \dots, \bar{a}_l$.

$$d_1\overline{a_1} + \dots + d_l\bar{a}_l = \bar{a}_j \qquad (2.13)$$

Так как любой элемент $\bar{x} \in L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ имеет вид $\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + \dots + x_m\bar{a}_m$, то из равенств (2.12) и (2.13) следует, что любой вектор $\bar{x} \in L$ есть линейная комбинация линейно независимых векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l$. Значит, $\dim L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = l$.◄

В теореме 9 доказано, что любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ образует базис пространства $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$. По теореме 3 любые два базиса линейного пространства L имеют одинаковое количество векторов.

Определение*: *Рангом системы векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ называется максимальное количество линейно независимых среди них.

Согласно сказанному выше, это определение корректное.

Теорема 2.12. *Если векторы $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r$ являются линейными комбинациями векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$,то $L(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r) \subset L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$.*

Доказательство.

►Действительно, проведя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 3.5 , получаем, что любая линейная комбинация векторов $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r$ является линейной комбинацией векторов $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m}$.◄

Следствие. Если векторы $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r$ являются линейными комбинациями векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ и, наоборот, векторы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ являются линейными комбинациями $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r$, то $L(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r) = L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$.

Системы векторов, удовлетворяющих условиям следствия, называют ***эквивалентными.***

§4.Ранг матрицы

Определение: Рангом матрицы A называется ранг системы её строк, т.е. максимальное количество линейно независимых среди них.

Пусть в матрице $\boldsymbol{A}$ размера $m \times n$ зафиксированы k номеров строк и k номеров столбцов, элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов образуют квадратную матрицу, определитель которой называем ***минором матрицы***, соответствующим выбранным строкам и столбцам.

Например, для матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

минор, соответствующий первой и третьей строкам и второму и пятому столбцу равен

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{vmatrix}$$

Среди всех миноров матрицы рассмотрим отличные от нуля миноры.

Теорема 2.13.

*Ранг матрицы **A** равен наивысшему из порядков ее отличных от нуля миноров.*

Доказательство.

►Для простоты считаем, что отличен от 0 минор

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2.14)$$

матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mnl} \end{pmatrix}$$

и что любой ее минор порядка $l+1$ равен $\mathbf{0}$.

Во-первых, первые l строк матрицы $\boldsymbol{A}$ линейно независимы. Действительно, если бы эти строки были линейно зависимы, то какая-то из них была бы линейной комбинацией других. Но тогда минор (2.14) был бы равен нулю по свойству 8 определителя.

Докажем, что любая другая строка с номером $k, k = l + 1, \dots, n$ является линейной комбинацией первых l строк. Для этого рассмотрим всевозможные определители вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{l1} & & a_{ll} & a_{lj} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} & a_{kj} \end{vmatrix}, j = 1, \dots, n. \tag{2.15}$$

Все эти определители равны нулю, т.к. при $j = 1, \dots, l$ они содержат одинаковый столбец, а при $j = l + 1, \dots, n$ определитель (2.15) представляет собой минор $l + 1$ –го порядка исходной матрицы, а все миноры такого порядка равны 0.

Рассмотрим алгебраические дополнения элементов j –го столбца определителя (2.15). Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} равно $(-1)^{i+l+1} A_i$, где

$$A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & & a_{i-1,l} \\ a_{i+1,1} & \ddots & a_{i+1,l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & & a_{ll} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} \end{vmatrix}, i = 1, \dots, l.$$

По условию,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \end{vmatrix} \neq 0.$$

По теореме Лапласа о разложении определителя (2.15) по столбцу имеем:

$$a_{1j} A_1 + \cdots + a_{lj} A_l + a_{kj} A = 0,$$

или

$$a_{kj} = -\frac{A_1}{A} a_{1j} - \cdots - \frac{A_l}{A} a_{lj}, j = 1, \dots, n$$

Это означает, что строка $(a_{k1}, \dots, a_{kn})$ матрицы $\boldsymbol{A}$ является линейной комбинацией строк $(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots (a_{l1}, \dots, a_{ln})$ этой матрицы с коэффициентами $-\frac{A_1}{A}, \dots, -\frac{A_l}{A}$, что и утверждалось.◄

Важным следствием доказанной теоремы является такое утверждение.

<u>Теорема 2.14.</u>

Ранг матрицы равен максимальному количеству линейно независимых столбцов этой матрицы.

<u>Доказательство</u>.

►Транспонируем матрицу, то есть сделаем её строки столбцами. При транспонировании матрицы миноры исходной матрицы совпадут, по свойству определителей, с минорами транспонированной матрицы и максимальный порядок отличных от нуля миноров не изменится. ◄

Дополним свойство 8 определителя утверждением.

Определитель порядка n равен 0 тогда и только тогда, когда его строки линейно зависимы.

<u>Доказательство</u>:

►Мы уже доказали, что из линейной зависимости строк следует равенство нулю определителя. Обратно, если определитель равен нулю, то максимальным порядком отличного от нуля минора может быть число, не превосходящее $n-1$. Значит, ранг матрицы не превосходит числа $n-1$ и, следовательно, её строки линейно зависимы.◄

Глава 3. Системы линейных уравнений. Общий случай

§1. Решение линейной однородной системы уравнений

Мы ранее установили, что множество решений линейной однородной системы уравнений

$$\boldsymbol{A}\bar{x}=\bar{0} \qquad (3.1)$$

образует линейное пространство, представляющее собой некоторое подпространство $\mathbb{R}^n$.

Решая систему (3.1) методом Гаусса, придем к системе вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1,l}x_l=-a_{1,l+1}x_{l+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ a_{22}x_2+\cdots+a_{2l}x_l=-a_{2l+1}x_{l+1}-\cdots-a_{2n}x_n \\ a_{ll}x_l=-a_{l,l+1}x_{l+1}-\cdots-a_{k,n}x_n. \end{cases} \qquad (3.2)$$

,

в которой $l \le n, a_{11} \ne 0, \dots, a_{ll} \ne 0$ и в случае $l = n$ правые части уравнений системы (3.2) равны 0 .

Матрица системы (3.2) выглядит так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \dots & a_{1l} & & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \dots & & & \dots \\ 0 & \dots & a_{ll} & a_{l,l+1} & & & a_{ln} \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

Теорема 3.1.

Ранг матрицы (3.3) равен l.

Доказательство.

►Теорема означает, что строки (3.3) линейно независимы. Для доказательства предположим противное, что

$$\bar{0} = c_1\overline{a_1} + \cdots + c_l\bar{a}_l, \qquad (3.4)$$

где

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, \quad a_{12}, \quad \cdots, \quad a_{1n}),$$

$$\bar{a}_2 = (0, \quad a_{22}, \quad \cdots, \quad a_{2n}).$$

$$\dots$$

$$\bar{a}_l = (0, \dots, \quad a_{ll}, \quad \cdots, \quad a_{ln}).$$

Первая координата правой части равенства (3.4) равна $c_1 a_{11}$, а первая координата правой части равна 0. Т.к. $a_{11} \neq 0$ то $c_1 = 0$ и так далее. В итоге приходим при каждом i к равенству$c_i a_{ii} = 0$, из которого следует, что $c_i = 0$, т.к. $a_{ii} \neq 0$. Таким образом, из (3.4)вытекает, что $c_1 = \cdots = c_l = 0$, т.е. что векторы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l$ − строки матрицы (3.3) − линейно независимы. ◄

Теорема 3.2.

Размерность пространства решений системы (2.16) равна $n - l$.

Доказательство.

►Так как $a_{ii} \neq 0$, последнее из равенств (3.2) при делении обоих его частей на a_{ll} дает

$$x_l = -\frac{a_{l,l+1}}{a_{ll}} x_{l+1} - \cdots - \frac{a_{ln}}{a_{ll}} x_n \ . \qquad (3.5)$$

Вводя очевидные обозначения для сокращения записи, перепишем (3.5) в виде:

$$x_l = \gamma_{l,l+1} x_{l+1} + \cdots + \gamma_{ln} x_n. \qquad (3.6)$$

Подставим это значение в предпоследнее из уравнений (3.2), перенесем все его члены с x_{l+1}, ..., x_n в его правую часть и разделим обе части полученного уравнения на $a_{l-1,l-1} \neq 0$. Получим:

$$x_{l-1} = \gamma_{l-1,l+1} x_{l+1} + \cdots + \gamma_{l-1,n} x_n. \qquad (3.7)$$

Подставим выражения (3.6) и (3.7) для x_l и x_{l-1} в следующее уравнение системы (3.2), перенесем все члены с $x_{l+1}, \dots, x_n$ в его правую часть и разделим обе части на $a_{l-2,l-2} \neq 0$ и так далее. В итоге получим, что для всех $k, k \leq l$ выполнено равенство

$$x_k = \gamma_{k,l+1} x_{l+1} + \cdots + \gamma_{k,n} x_n. \qquad (3.8)$$

Положим $x_{1,l+1} = 1, x_{1,l+2} = 0, \dots, x_{1,n} = 0$ и вычислим по формуле (3.8) остальные значения $x_{1,k}, k = 1, \dots, l$. При этом получится решение системы (3.2):

$$\bar{x}_1 = (x_{11}, \dots, x_{1l}, 1,0, \dots ,0).$$

Аналогично, полагая $x_{2,l+1} = 0, x_{1,l+2} = 1, \dots, x_{1,n} = 0$, получим ещё одно решение системы (3.2):

$$\bar{x}_2 = (x_{21}, \dots, x_{2l}, 0,1,0, \dots ,0).$$

Продолжим этот процесс и получим решения системы:

$$\bar{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kl}, 0, \dots ,1,0, \dots ,0), k = 1, \dots, n - l \qquad (3.9)$$

(1 стоит на $l + k -$ ом месте).

Докажем, что векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-l}$ линейно независимы. Предположим противное что

$$c_1\bar{x}_1 + \dots + c_{n-l}\bar{x}_{n-l} = \bar{0}. \qquad (3.10)$$

Последние $n - l$ координат вектора, стоящего в левой части равенства (3.10) равны, в соответствии с (3.9), числам $c_1 \dots, c_{n-l}$. Но последние $n - l$ координат правой части равенства (3.10) равны $\mathbf{0}$. Поэтому $c_1 = \dots = c_{n-l} = 0$ и это означает, что векторы (3.9) линейно независимы.

Покажем, что любое решение $\bar{x}$ системы (3.2) есть линейная комбинация векторов (3.9). Действительно, пусть решение системы $\bar{x}$ –имеет координаты:

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n).$$

Линейная комбинация векторов (3.9) вида:

$$x_{l+1}\bar{x}_1 + \cdots x_n\bar{x}_{n-l}$$

имеет тот же набор последних $n - l$ координат, т.е. те же числа $x_{l+1}, \dots, x_n$. Но формулы (3.8) показывают, что если совпали координаты $x_{l+1}, \dots, x_n$,то должны совпасть и координаты $x_1, \dots, x_l$, т.е.

$$\bar{x} = x_{l+1}\bar{x}_1 + \cdots x_n\bar{x}_{n-l}. \blacktriangleleft$$

Примечание: Мы получили, что векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-l}$ образуют базис пространства решений системы (3.2).

Определение : Любой базис пространства решений системы (3.1) называется ее ***фундаментальной системой решений***.

Теорема 3.3.

Пусть l *- ранг матрицы* $\boldsymbol{A}$ *системы (3.1).Тогда размерность пространства ее решений равна* $n - l$.

Доказательство.

►Уравнения (3.2) являются линейными комбинациями уравнений системы (3.1). В свою очередь, проделывая над уравнениями (3.2) обратные преобразования, мы получим систему (3.1), причем уравнения (3.1) являются линейными комбинациями уравнений (3.2). По следствию теоремы 2.12 ранги матриц систем (3.1) и (3.2) совпадают и равны l по теореме 2.13. Системы (3.1) и (3.2) равносильны, т.к. система (3.2) получена из (3.1) в результате применения метода Гаусса. Поэтому размерность пространства решений (3.1) равна $n - l$.Теорема доказана.◄

§2.Неоднородная система уравнений. Принцип суперпозиции решений. Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим неоднородную систему уравнений:

$$\boldsymbol{A}\bar{x} = \bar{b}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

Теорема 3.4.

Если система (3.11) *имеет решение* $\bar{x}_0$*, то для любого другого ее решения* $\bar{x}$ *существует решение* $\bar{X}$ *однородной системы*

$$\boldsymbol{A}\bar{X} = \bar{0} \tag{3.12}$$

такое, что $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{X}$.

Доказательство.

►Если $A\bar{x} = \bar{b}$ и $A\bar{x}_0 = \bar{b}$, то $A(\bar{x} - \bar{x}_0) = \bar{b} - \bar{b} = \bar{0}$, т.е.$\bar{x} - \bar{x}_0 = \bar{X}$ удовлетворяет системе (3.12), что и утверждалось.◄

Следствие. *(Принцип суперпозиции решений) Если векторы* $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_k$ *являются решениями, соответственно, систем* $\boldsymbol{A}\bar{x}_l = \bar{b}_l$*,то вектор* $\bar{x} = \bar{x}_0 + \dots + \bar{x}_k$ *является решением системы* $\boldsymbol{A}\bar{x} = \overline{(b_0 + \dots + \bar{b}_k)}$.

Действительно, $\boldsymbol{A}\bar{x} = \boldsymbol{A}(\bar{x}_0 + \dots + \bar{x}_k) = \boldsymbol{A}\bar{x}_0 + \dots + \boldsymbol{A}\bar{x}_k = \bar{b}_0 + \dots + \bar{b}_k$.

Назовем ***расширенной матрицей системы уравнений*** (3.11) матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \qquad (3.13)$$

которую будем обозначать $(\boldsymbol{A}|\bar{b})$.

При решении системы (3.11) методом Гаусса использовались преобразования уравнений этой системы, при которых происходили следующие преобразования матрицы (3.13):

- перестановка двух строк местами;
- умножение всех элементов строки на отличное от нуля число;
- прибавление ко всем элементам строки элементов другой строки, умноженное на одно и тоже число.

В результате использования метода Гаусса исходная система уравнений (3.11) либо придет к системе вида (3.2), либо к несовместной системе, содержащей уравнение

$$0 \cdot x_{l+1} + \cdots + 0 \cdot x_n = b_{l+1} \neq 0.$$

В первом случае расширенная матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots a_{2l} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots a_{ll} & \dots & a_{ln} & b_l \end{pmatrix}. \qquad (3.14)$$

Во втором случае получится матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots a_{2l} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots a_{ll} & & a_{ln} & b_l \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{l+1} \end{pmatrix}. \qquad (3.15)$$

Обе эти матрицы имеют вид (3.3) и поэтому по теореме 3.1 их строки линейно независимы. При этом ранг матрицы (3.14) равен l, так как она имеет ненулевой минор из элементов первых l строк и столбцов, ранг матрицы (3.15) равен $l + 1$, так как она имеет не равный нулю минор из элементов первых $l + 1$ строк и первых l и последнего столбца расширенной матрицы.

Вывод, сделанный нами относительно разрешимости системы (3.11), можно сформулировать в виде теоремы.

<u>Теорема 3.5.(Кронекер, Капелли)</u>

Система $\boldsymbol{A}\bar{x} = \bar{b}$ *разрешима тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\boldsymbol{A}$ *равен рангу расширенной матрицы* $(\boldsymbol{A}|\bar{b})$

<u>Доказательство</u>.

►Действительно, ранг расширенной матрицы (3.14) имеющей решение системы равен числу l, как и ранг матрицы $\boldsymbol{A}$. Ранг расширенной матрицы неразрешимой системы (3.15) на 1 больше, чем ранг $\boldsymbol{A}$.◄

§3.Переход к новому базису пространства

Рассмотрим вопрос о переходе от одного базиса пространства V к другому его базису.

Пусть заданы два произвольных базиса пространства V: $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$. Каждый из векторов $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$ разложим по базису $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

Пусть

$\bar{e}'_1 = c_{11}\bar{e}_1 + \dots + c_{n1}\bar{e}_n,$

…

$\bar{e}'_n = c_{1n}\bar{e}_1 + \dots + c_{nn}\bar{e}_n$ (3.16)

Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

(столбцы этой матрицы состоят из координат (3.16) векторов $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$).

Предположим, что вектор $\bar{x}$ имеет координаты $x_1, \dots, x_n$ в базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и координаты $x'_1, \dots, x'_n$ в базисе $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$.

Тогда, ввиду (3.16):

$$\bar{x} = x'_1\bar{e}'_1 + \dots + x'_n\bar{e}'_n = x'_1(c_{11}\bar{e}_1 + \dots + c_{n1}\bar{e}_n) + \ldots + x'_n(c_{1n}\bar{e}_1 + \dots + c_{nn}\bar{e}_n) =$$

$$= (c_{11}x'_1 + \dots + c_{1n}x'_n)\bar{e}_1 + \dots + (c_{n1}x'_1 + \dots + c_{nn}x'_n)\bar{e}_n. \quad (3.18)$$

Так как, по предположению, $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$ из единственности разложения вектора по базису получаем, ввиду (3.18)

$$\begin{cases} c_{11}x'_1 + \cdots + c_{1n}x'_n = x_1, \\ \qquad\qquad \ldots \\ c_{n1}x'_1 + \cdots + c_{nn}x'_n = x_n. \end{cases} \tag{3.19}$$

Равенство (3.18) можно, используя (3.16), записать в матричной форме

$$\boldsymbol{C}\bar{x}' = \bar{x}, \tag{3.20}$$

где

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

обозначают столбцы из координат вектора $\bar{x}$ в базисах, соответственно, $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ и $\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n$.

Определитель матрицы $\boldsymbol{C}$ не равен 0 (говорят также, что ***C* невырожденная матрица)** так как, в противном случае, по дополнению к свойству 8 определителей, установленному в конце предыдущего параграфа, были бы линейно зависимы строки матрицы $\boldsymbol{C}$, что означает линейную зависимость векторов $\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n$.

Поэтому у матрицы $\boldsymbol{C}$ имеется обратная матрица $\boldsymbol{C}^{-1}$ и из (3.20) получаем, умножая обе его части слева на матрицу $\mathbf{C}^{-1}$,

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}\,\bar{x}' = \boldsymbol{C}^{-1}\bar{x}\,, \boldsymbol{E}\,\bar{x}' = \boldsymbol{C}^{-1}\bar{x},$$

$$\bar{x}' = \boldsymbol{C}^{-1}\bar{x}. \tag{3.21}$$

Отметим, что и равенства (3.16) можно записать в матричном виде:

$$(\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n) = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)\boldsymbol{C} \tag{3.22}$$

Это равенство несколько необычное: в нем координаты векторов $(\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n)$ и $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ - не числа, а векторы. Но поскольку определены произведения вектора на число и сумма векторов, запись (3.16) в виде (3.22) окажется не только осмысленной, но и весьма удобной. Отметим, что нам еще много раз придётся встретиться с векторами и матрицами, элементы которых — не обязательно числа.

Рассмотрим важную задачу.

Пусть

$(\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n) = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)\boldsymbol{C}'$ и вектор $\bar{x}$ имеет координаты $x'_1, \ldots, x'_n$ в базисе $\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n$.

Пусть

$(\bar{e}_1'', \dots, \bar{e}_n'')$= $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)\boldsymbol{C}''$ и тот же вектор $\bar{x}$ имеет координаты $x_1'', \dots, x_n''$ в базисе $\bar{e}_1'', \dots, \bar{e}_n''$.

Как связаны между собой координаты $x_1', \dots, x_n'$ и $x_1'', \dots, x_n''$?

Для ответа на этот вопрос заметим, что согласно (3.20):

$$\boldsymbol{C}'\bar{x}' = \bar{x} \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{C}''\bar{x}'' = \bar{x} \tag{3.24}$$

И, согласно (3.23), (3.24),

$$\bar{x}' = (\boldsymbol{C}')^{-\mathbf{1}}\bar{x}$$

Из (3.21) ,(3.24) найдем:

$$\bar{x}'' = (\boldsymbol{C}'')^{-\mathbf{1}}\bar{x} = (\boldsymbol{C}'')^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{C}'\bar{x}'.$$

В свою очередь, так как,

$$((\boldsymbol{C}'')^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{C}')^{-1} = (\boldsymbol{C}')^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{C}'', \tag{3.25}$$

имеем

$$\bar{x}' = (\boldsymbol{C}')^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{C}''\,\bar{x}''.$$

Для доказательства равенства (3.25) установим, что для любых невырожденных матриц $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$

$(\boldsymbol{AB})^{-\mathbf{1}} = \boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}$.

Действительно,

$$\boldsymbol{ABB}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}} = \boldsymbol{AEA}^{-\mathbf{1}} = \boldsymbol{AA}^{-\mathbf{1}} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{EB} = \boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}.$$

Рассмотрим еще одну важную задачу.

Предположим, что мы решаем систему линейных уравнений :

$$\boldsymbol{A}\bar{x} = \bar{b} \tag{3.26}$$

и произведем в ней замену переменных по формуле $\bar{x} = \boldsymbol{C}\bar{x}'$. Какой вид будет иметь матрица системы в переменных $x_1', \dots, x_n'$?

Ответ прост: в равенство $\boldsymbol{A}\bar{x} = \bar{b}$ подставляем $\bar{x} = \boldsymbol{C}\bar{x}'$, получим $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\bar{x}') = \bar{b}$**.** Используя ассоциативность умножения матриц, окончательно находим $(\boldsymbol{AC})\bar{x}' = \bar{b}$, т.е. матрица системы (3.26) при замене примет вид $\boldsymbol{AC}$.

При этом $\bar{x}' = (\boldsymbol{AC})^{-1}\bar{b}$ =$\boldsymbol{C}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\bar{b}$.